MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES

Tema:
Resolución de Problemas

Teoría de Números

Cinvestav Tamaulipas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Cinvestav - Tamaulipas

Cinvestav Tamaulipas

Contenido

Temas a desarrollar de Teoría de Números

a. Números naturales

b. Divisibilidad

c. Máximo común divisor

d. Números primos

e. El teorema fundamental de la aritmética

Introducción / Teoría de Números

- **Teoría de Números**. Área de las matemáticas que estudia las propiedades de los números en general, particularmente los **enteros**
- Campo de las matemáticas que estudia los problemas que surgen en el estudio de los **números enteros**.
- Aborda diversos problemas de la vida cotidiana
- Es tan importante dentro de las matemáticas, como las matemáticas para el resto de las ciencias
- Anteriormente algunos se refieren a "aritmética" para referirse a la teoría de números. La teoría de números suele ser denominada alta aritmética
- La aritmética es diferente a la aritmética elemental

Introducción / Teoría de Números

- Se subdivide en:
  - <u>Teoría elemental de números e integrales</u> y <u>teoría analítica de números</u>
- **Teoría elemental de números**
- Estudia los números enteros sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas
- Temas: divisibilidad, máximo común divisor, números primos, factorización de enteros como producto de números primos, números perfectos y congruencias
- Mención especial: El pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler, el teorema chino del resto y ley de reciprocidad

Introducción / Teoría de Números

- **Teoría analítica de números**
- Emplea como herramientas el cálculo y el análisis complejo para abordar otros temas sobre números enteros.
- Algunos ejemplos: Teorema de los números primos y la hipótesis de Riemann, el problema de Waring, la conjetura de los números primos gemelos y la conjetura de Goldbach

Introducción / Teoría de Números

- Un **número** es una cantidad o una medida representada, por un **número entero natural** (número cualquiera), o por una relación de dos enteros naturales
- Así, un **número** es un elemento de un conjunto de números que deben cumplir ciertas propiedades
- Se han definido los conjuntos *N, Z, Q, R* ó *C*, cuya construcción se hace por etapas sucesivas a partir del conjunto *N* de los números naturales.

Introducción / Teoría de Números

- Existen dos clasificaciones de números de conocimiento universal:
  - La *paridad*, que los divide en pares e impares
  - La *primalidad*, que los divide en primos y compuestos
- pares (2,4,6,…) impares (1,3,5,…)
- Se dice que un entero n es par si existe otro entero k tal que $n = 2k$
- Se dice que un entero n es impar si existe otro entero k tal que $n = 2k + 1$

Introducción / Teoría de Números

- **Números naturales**: Son los números que sirven para contar.
- El conjunto de los números naturales se representa por $\mathbb{N}$ y está formado por $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\cdots\}$
- **Números enteros**: Son los números que se puede sumar y restar.
- El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbb{Z}$ y está formado por $\mathbb{Z} = \{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\cdots\}$

Introducción / Teoría de Números

- **Números racionales**: Son los números que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir por números distintos de cero.
- El número racional es el **cociente** de dos números enteros, esto es a/b, con $a, b \in \mathbb{Z}$
- El conjunto de los números racionales se representa por $\mathbb{Q}$I
- **Números iracionales**: Son los números que no tienen una forma decimal periódica, y no pueden expresarse en forma de fracción como $\sqrt{2}$, π, e, etc.
- El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbf{I}$

Introducción / Teoría de Números

- **Números reales**: Son los números formados por los racionales e irracionales
- El conjunto de los números reales se representa por $\mathbb{R}$.
- Por definición tenemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$, que es la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbf{I}$
- **Números complejos**: Los números complejos se representan como $\mathbb{C}$
- tienen su expresión en $a + bi$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria, $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Propiedades números naturales

- El conjunto de los números naturales se puede caracterizar mediante los **axiomas** de **Peano**:

  A-1 Hay un elemento especial $0 \in \mathbf{N}$.

  A-2 Para todo $n \in \mathbf{N}$ existe un único elemento $n^+ \in \mathbf{N}$ llamado el **sucesor de n**.

  A-3 Para todo $n \in \mathbf{N}$, $n^+ \neq 0$.

  A-4 Si $n, m \in \mathbf{N}$ y $n^+ = m^+$ entonces $n = m$.

  A-5 Si $\mathbf{S}$ es un subconjunto de $\mathbf{N}$ tal que:

  $0 \in \mathbf{S}$,

  $n^+ \in \mathbf{S}$ siempre que $n \in \mathbf{S}$, entonces $\mathbf{S} = \mathbf{N}$.

Propiedades números naturales

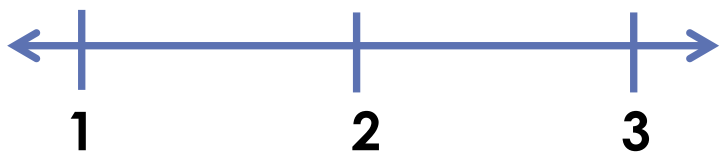
- Con base en los axiomas de Peano se supone de antemano la existencia del conjunto **N**
- A-1 y A-3 establecen la existencia de un primer número natural que es 0.
- A-2 y A-4 indican que números naturales diferentes tienen sucesores diferentes
- A-5 se conoce como *El Principio de Inducción Matemática*
- En las aplicaciones de este principio, se denomina Hipótesis de Inducción a la hipótesis $\mathbf{n \in S}$, a partir de la cual se demuestra que $\mathbf{n^+ \in S}$

Propiedades números naturales

- El conjunto de los números naturales tiene un elemento inicial
  - 0 es el número inicial, no existe ningún número antes
- Todo número natural posee un único sucesor
  - El sucesor se encuentra inmediatamente a su derecha en la recta numérica
- Dos números naturales distintos no pueden tener el mismo sucesor
  - Los números naturales solo están presentes en la recta numérica una única vez
- El conjunto de los números naturales es infinito
  - siempre habrá otro número natural a la derecha del número más grande
- El conjunto de los números naturales es ordenado
  - Los números naturales están ordenados, cada uno tiene una posición única en la recta numérica

Orden números naturales

- El concepto de recta numérica



- Un número es **mayor que** (>) otro si se encuentra a su derecha en la recta numérica
- Un número es **menor que** (<) otro si se encuentra a su izquierda en la recta numérica
- Un número es **igual a** (=) otro si ocupa la misma posición en la recta numérica.
  - Un número es igual a si mismo y nunca a otro

Conceptos números naturales

- *Proposición*: Expresión que puede ser verdadera o falsa
- *Teorema*: Afirmación (verdad) de algo demostrable.
- *Lema*: Verdad demostrada
- *Corolario*: Consecuencia de un teorema ya demostrado. Consecuencia obvia
- *Axioma*: Verdades que ocurren en un dominio
- *Postulado*: Proposición no evidente, tampoco demostrada, pero ue se acepta ya que no existe algo que lo contradiga

Suma de números naturales

- Es la primera operación que se puede realizar con los números naturales.
- Las siguientes ecuaciones definen la adición en **N**, para todo m, n $\in$ N

$$m + 0 = m,$$

$$m + n^{+} = (m + n)^{+}$$

- Como todo número natural distinto de cero es el sucesor de un número natural, la adición resulta bien definida

Suma de números naturales

- **Teorema**. La adición de números naturales es asociativa, es decir: para todo n,m, k $\in$ N

$$(n + m) + k = n + (m + k)$$

- **Demostración**: empleando el axioma A-5 —PIM

Sea $S = \{k \in N \mid (n + m) + k = n + (m + k) \text{ para todo } n,m \in N\}$

1- $0 \in S$ puesto que

$$(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0) \quad \text{(def. suma)}$$

2. Supongamos que $k \in S$, es decir que para todo $n,m \in N$

$$(n + m) + k = n + (m + k).$$

3. Entonces,

$$\begin{aligned}(n + m) + k^{+} &= [(n + m) + k]^{+} && \text{(def. suma)}\\ &= [n + (m + k)]^{+} && \text{(hip. inducción)}\\ &= n + (m + k)^{+} && \text{(def. suma)}\\ &= n + (m + k^{+}) && \text{(def. suma)}\end{aligned}$$

Suma de números naturales

- Lema

  Para todo $m \in \mathbf{N}$, $0 + m = m$

- Lema

  Para todo $m, n \in \mathbf{N}$, $m^+ + n = (m + n)^+$

- Teorema

  La suma de números naturales es conmutativa:

  para todo $m, n \in \mathbf{N}$, $m + n = n + m$

- Teorema

  Si n,m y k son números naturales tales que

  $m + k = n + k$, entonces $m = n$

Suma de números naturales

- <u>**Propiedades**</u>
- **Cerrada**. La suma de dos números naturales siempre es otro número natural. Ej. $1 + 2 = 3$
- **Conmutativa**. El orden de los sumandos no altera la suma. Ej. $a + b = b + a$
- **Elemento neutro**. El 0 es el elemento neutro aditivo en el conjunto de los números naturales. Ej. $a + 0 = a$
- **Asociativa**. El orden de las sumas parciales en una operación con más de dos sumandos no afecta el resultado de la operación. Ej. $(a + b) + c = a + (b + c)$

Multiplicación de números naturales

- Es la suma repetida (b veces) de un número a.
- El **multiplicando** (a) y el **multiplicador** (b) también reciben el nombre de **factores**
- Multiplicación = producto
- **Propiedades**
- **Cerrada**. Toda multiplicación de dos números naturales nos da como resultado otro número natural
- **Conmutativa**. El orden de los factores no altera el producto. Ej. a x b = b x a
- **Asociativa**. El producto total de una multiplicación no varía si se reemplazan dos o más de los factores por su producto parcial. Ej. (a x b) x c = a x (b x c)

Multiplicación de números naturales

- **Elemento neutro**. El 1 es el elemento neutro multiplicativo en el conjunto de los números naturales
- **Elemento absorbente**. El 0 es el elemento absorbente con respecto a la multiplicación en el conjunto de los números naturales
- **Distributividad con respecto a la suma**. El producto de una suma de números naturales y otro número natural es igual a la suma de las multiplicaciones del multiplicador por cada uno de los sumandos. Ej.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Resta de números naturales

- Operación inversa a la suma.
- Resta = sustracción = diferencia
- **<u>Propiedades</u>**
- **No es cerrada**. La resta de dos números naturales pertenece a **N** solamente si el minuendo es mayor o igual al sustraendo. Ej. 8 – 3 = 5   3 – 8 = ?
- **No es conmutativa**. El resultado cambia si se invierte la posición del minuendo y sustraendo. Ej. 8–3= 5   3–8= ?
- **No es asociativa**. No es posible cambiar el orden de restas sucesivas sin alterar el resultado final. Ej.

  (30 - 20) – 10 = 0

  30 - (20 - 10) = 20

Resta de números naturales

- **No tiene elemento neutro**. El 0 es elemento neutro en la resta solo si es sustraendo. Ej. $a - 0 = a \qquad 0 - a \not\subset \mathbf{N}$
- **Distributividad de la multiplicación con respecto a la resta**. El producto de una resta de números naturales y otro número natural es igual a la resta de las multiplicaciones del multiplicador por cada uno de los componentes de la resta. Ej.

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

$$(b - c) \times a = (b \times a) - (c \times a)$$

División de números naturales

- Operación inversa a la multiplicación

  dividendo / divisor = cociente

La división inexacta y el residuo

- En el conjunto de los números naturales existen dos tipos de división:
  - división **exacta**. No hay residuo
  - división **inexacta** (división euclídea). Hay residuo. Ej.

    10 / 3 = (3 x 3) + 1 24 / 5 = (4 x 5) + 4

La división por 0

- no tiene solución en el conjunto de los números naturales. Ej. a/0 = 0 x ? = a (?=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …)

División de números naturales

- <u>**Propiedades**</u>
- **No es cerrada**. Por la división inexacta no siempre se obtendrá un natural. Ej. 7/18 = 0 + 7
- **No es conmutativa**. No se puede intercambiar el dividendo y el divisor sin alterar el resultado. Ej.

  $a / b \neq b / a$
- **No es asociativa**

  $(a / b) / c) \neq a / (b / c)$

  $(60 / 6) / 2 = 5$

  $60 / (6 / 2) = 20$

División de números naturales

- **No tiene elemento neutro**. En el conjunto de los números naturales no existe un elemento neutro. Ej.

  $28 / 1 = 28$ $1/ 28 \neq 32$

- **Distributividad con respecto a la suma y la resta**. La división de una **suma** o **resta** de números naturales es igual a la suma o resta de las divisiones de cada uno de los sumandos con el divisor. Ej.

  $(a + b) / c = (a / c) + (b / c)$

  $(6 + 4) / 2 = (6 / 2) + (4 / 2) = 10 / 2 = 3 + 2 = 5 = 5$

La igualdad no se cumple si la aplicamos por la izquierda

$c / (a + b) (c / a) + (c /b)$ No es conmutativa

$60 / (10 + 5) = 60 / 15 = 4$

$(60 / 10) + (60 / 5) = 6 + 12 = 18$

Potenciación de números naturales

- Es la multiplicación de repetida del número **a** un total de **n** veces.
- **a** es la base, **n** el exponente, resultado es la **potencia**

  $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

- **Cuadrados y cubos perfectos**. Cuando el exponente es 2 se dice que se eleva al **cuadrado**. Los números resultantes de una exponenciación al cuadrado se llaman **cuadrados perfectos**. Ej. $2^4 =$ **16**
- Si el exponente es 3, la base se eleva al **cubo** y a la potencia se le llama **cubo perfecto**. Ej. $3^3 =$ **27**

Potenciación de números naturales

- **Exponentes especiales: 0 y 1**
- Son casos especiales
- Cuando el exponente es igual a 1, el resultado es igual a la base. Ej. $43^1 = 43$
- Cuando el exponente es igual a 0 y la base es diferente de 0, el resultado es igual a 1. Ej. $4^0 = 1$, $25^0 = 1$
- La operación 0^0 no está definida en **N**. Es decir, su resultado no corresponde a ningún número natural

Potenciación de números naturales

Leyes de las potencias

Nombre	Regla	Ejemplo
Potencia de una multiplicación	$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	$(2 \times 4)^4 = 2^4 \times 4^4$
Potencia de una división	$(a / b)^m = a^m / b^m$	$(20 / 5)^3 = 20^3 / 5^3$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m\times n}$	$(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$
Multiplicación de potencias de igual base	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$6^4 \times 6^5 = 6^{4+5} = 6^9$
División de potencias de igual base	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$8^5 / 8^4 = 8^{5-4} = 8^1$

La división de potencias de igual base solo tiene solución en **N** cuando el exponente en el numerador es mayor o igual al exponente en el denominador $m \geq n$. En otro caso no definida

Ejercicios

…