MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES

Tema:
Resolución de Problemas

Teoría de Números

Cinvestav Tamaulipas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Cinvestav - Tamaulipas

Contenido

Temas a desarrollar de Teoría de Números

a. Números naturales

b. Divisibilidad

c. Máximo común divisor

d. Números primos

e. El teorema fundamental de la aritmética

Divisibilidad

- Teoría de la divisibilidad
- Los números enteros: … -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …
  - enteros positivos: 1, 2, 3, 4, …
  - enteros negativos: -1, -2, -3, -4, …
  - enteros no-negativos: 0, 1, 2, 3, 4, …
- Se dice que un entero **n** es **divisible** entre otro entero **d**, distinto de cero (**divisor**), si existe un entero **m**, tal que n = d · m, su división es exacta
- Si **n** y **d** son positivos, **m** también es positivo.
- Se expresa que **n** es divisible entre **d**, o que **d** es un divisor de **n**, por **d|n**.
- Así se tiene que **1|n** para todo entero **n** y que **d|d**, **d|0**, para todo **d ≠ 0**

Divisibilidad

- La suma, resta y multiplicación de dos enteros **a** y **b** también son enteros
- El cociente de la división de **a** por **b** (b ≠ 0) puede ser tanto **entero** como **no-entero**
- Teorema: Todo entero **a** se expresa de un modo único mediante un entero positivo **b** como

  $a = bq + r; \quad 0 < r < b$

  q se llama cociente incompleto y r el residuo o resto

Divisibilidad

- Teorema. Supongamos que **a**, **b** y **c** son números enteros. Entonces:
- Si $a \neq 0$ entonces $a|0$, $a|a$, $a|-a$
- $1|a$, $-1|a$
- Si $a|b$ entonces $a|bc$
- Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
- Si $a|b$ y $a|c$ entonces para todo $x, y \notin Z$, $a|(bx + cy)$
- Si $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$
- Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b$ o $a = -b$

Divisibilidad

- **Teorema de la división**
- Sean a, b $\in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Existen q, r $\in \mathbb{Z}$ únicos tales que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \;\; r < |b|$$

- Si a, b $\in \mathbb{Z}^+$, el 'algoritmo de la división' corresponde a la división usual. Si a o b es negativo, la división usual difiere del teorema de la división
- <u>Generalización útil</u>
- Sean a, b $\in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Existe un único r $\in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{Si } b > 0,\; a = b\lfloor a/b \rfloor + r \quad \text{con } 0 \leq r < b$$

$$\text{Si } b < 0,\; a = b\lceil a/b \rceil + r \quad \text{con } 0 \leq r < |b|$$

Divisibilidad

- El residuo o resto de la división de **a** por **b** se denota rem(a, b) o simplemente por **r**
- a | b si rem(a, b) = 0
- Para efectos teóricos puede ser conveniente que **r** > 0, pero en cálculos computacionales se puede permitir que **r** sea negativo
- Si el residuo de la división es diferente de 0, el dividendo no es divisible entre el divisor. Ej.

  11/5 = 2 residuo 1, 5 no es divisor de 11
- Los divisores de un número también se llaman **factores** o **submúltiplos** de ese número

Divisibilidad

- **Divisibilidad del 0**
- El 0 es un caso especial porque es divisible entre todos los números enteros, el resultado de dividir el 0 entre cualquier otro número siempre es 0 y la división siempre es exacta
- **Reglas de divisibilidad**
- ayudan a verificar rápidamente si un número es divisible entre algunos números
- **Divisibilidad entre 2**
- Un número es divisible entre 2 si su última cifra es divisible entre 2: 0, 2, 4, 6 y 8. Ej.

136 es divisible entre 2: 6

442 es divisible entre 2: 2

Divisibilidad

- **Divisibilidad entre 3**
- Un número es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es divisible por 3. Ej.

  36 ya que 3+6=9, 9 es divisible por 3

  114 ya que 1+1+4=6, 6 es divisible por 3

  495 ya que 4+9+5=18, 1+8=9, 9 es divisible por 3

  2784 ya que 2+7+8+4=21, 2+1=3, 3 es divisible por 3

  11 no es divisible por 3, 1+1=2

  89 no es diivisible por 3, 8+9=17

Divisibilidad

- **Divisibilidad entre 5**
- Un número es divisible entre 5 si la última cifra es 5 o 0. Ej.

  35 ya que termina en 5

  2220 ya que termina en 0

  58785 ya que termina en 5

- no divisibles entre 5

336	891
777	1289

Divisibilidad

- **Divisibilidad entre 10**
- Un número es divisible entre 10 si la última cifra es 0. Ej.

  100 ya que termina en 5

  2220 ya que termina en 0

  5130 ya que termina en 5

- no divisibles entre 10

332	133
987	3579

Cinvestav Tamaulipas

Divisibilidad

- **Propiedades**
- **Reflexibilidad.** Todo número natural distinto de 0 es divisor de sí mismo, el resultado es 1 y residuo 0
- **Divisibilidad por la unidad**. Todo número natural es divisible por el número 1.
- La división de todo número natural por 1 siempre es igual al número original y el residuo es 0
- **No es simétrica**. Si un número **b** es factor de un número **a**, la relación no se cumple en la dirección opuesta: **a** no es divisor de **b**. Ej.

$$66 / 6 = 11$$

$$6 / 66 \neq 11$$

Cinvestav Tamaulipas

Divisibilidad

- **Transitividad**. Si un número **a** es divisible por un número **b** y **b** es divisible por un número **c**, entonces **a** es divisible por **c**. Ej.
- Todos los factores de **b** también son factores de **a**

36 / 6 = 6	6 / 2 = 3	36 / 2 = 18
56 / 2 = 28	28 / 7 = 4	56 / 4 = 14

Ejercicios

…