MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES

Tema:
Resolución de Problemas

Teoría de Números

Cinvestav
Tamaulipas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Cinvestav - Tamaulipas

Contenido

Temas a desarrollar de Teoría de Números

a. Números naturales

b. Divisibilidad

c. Máximo común divisor

d. Números primos

e. El teorema fundamental de la aritmética

Teorema Fundamental Aritmética

- Concepto definido por Euclides
- Integra los conceptos vistos anteriormente:

  * divisibilidad

  * números compuestos, números primos

  * máximo común divisor

Recordar

- Todos los números primos son naturales {1,2,3,4,5,…} y son mayores a 1 {2,3,4,5,…}
- Son sólo divisibles entre 1 y ellos mismos
- Descomposición de números enteros (factorización)
- Multiplicación de factores

Teorema Fundamental Aritmética

- El teorema remarca la importancia de los números primos en los números compuestos.
- Presenta a los números primos como los **ladrillos básicos** con los que se **construyen** los enteros positivos
- El teorema deja ver que la suma y multiplicación están totalmente determinadas por sus valores en las potencias de los números primos
- La factorización de un número es conocer todos de los factores del mismo. P.ej., la factorización de **x** es

  $$2^a \cdot 3^b \cdot \ \ldots \ \cdot 11^c \cdot 13^d$$

- Conociendo la factorización de 2 números en factores primos se puede saber el máximo común divisor (mcd)

Teorema Fundamental Aritmética

- Para factorizar hay que encontrar, en cada paso, el divisor primo más pequeño.
- La factorización prima de un número n se obtiene dividiendo por los primos ≤ n

- Ejemplo

Factorizar 36 y 84 como producto de números primos.

$$36 = \mathbf{2} * 18$$
$$= \mathbf{2} * \mathbf{2} * 9$$
$$= \mathbf{2} * \mathbf{2} * \mathbf{3} * \mathbf{3}$$
$$= 2^2 * 3^2$$

$$84 = \mathbf{2} * 42$$
$$= \mathbf{2} * \mathbf{2} * 21$$
$$= \mathbf{2} * \mathbf{2} * \mathbf{3} * \mathbf{7}$$
$$= 2^2 * 3 * 7$$

Teorema Fundamental Aritmética

- **Teorema Fundamental de la Artimética**
- Todo número entero $n \geq 2$ se puede escribir como producto finito de números primos.
- La factorización de cualquier entero positivo n en primos es única, independientemente del orden de los primos
- Todo entero positivo **a** que no sea 0 o 1 se puede factorizar de la forma

  $a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_3$ siendo p_i primos

  esta factorización de a es **única**

Teorema Fundamental Aritmética

- **Teorema Fundamental de la Artimética**
- Todo número natural n > 1 se puede factorizar de manera única como

$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_k^{\beta_k}$$

donde $p_1 \ldots p_k$ son primos distintos y $\beta_1 \ldots \beta_k$ son enteros positivos . A esta factorización se le llama **factorización prima de n / factorización completa**

- A lo anterior se le llama también **forma canónica** de factorización de **a**
- Canónico: Que está establecido y admitido como base para usos posteriores. Lo mínimo admitido

Teorema Fundamental Aritmética

- Demostración. Mediante el principio de inducción sobre $n \in Z_{\geq 2}$
- Por definición 2 es primo.
- Probar que aplica para todos los números 2,3,…,**n**
- Si **n + 1** es primo, el teorema se cumple
- Si **n + 1** no es primo, entonces **n + 1** debe tener un divisor positivo **a** distinto de **1** y **n + 1**. Es decir, existe un número **b** ∈ Z tal que **n + 1** = **ab**
- Como **a** ≠ 1, **n + 1**, también se tiene **b** ≠ 1, n + 1, por lo que **a** y **b** están en el conjunto {2,3,…,n}
- Por tanto, **a** y **b** se escriben como producto finito de números primos, entonces también **n+1** = **ab** es producto finito de números primos

Teorema Fundamental Aritmética

- Por las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, el orden de los factores no es importante al calcular la factorización completa de un número.
- La factorización completa de los primeros 6 números **compuestos** es:

  4 = 2 x 2

  6 = 2 x 3

  8 = 2 x 2 x 2

  9 = 3 x 3

  10 = 2 x 5

  12 = 2 x 2 x 3

Teorema Fundamental Aritmética

- Cálculo de la factorización completa
- Métodos:

    diagramas de árbol

    divisiones entre factores primos sucesivos

- Diagramas de árbol

  Consiste en identificar dos o más números que multiplicados entre si den el número original, sin importar si son primos o no. Luego se anotan bajo el número inicial como si fueran ramas en un árbol y se procede de la misma manera para cada uno de ellos.

Teorema Fundamental Aritmética

- Métodos de factorización completa:

  * diagramas de árbol

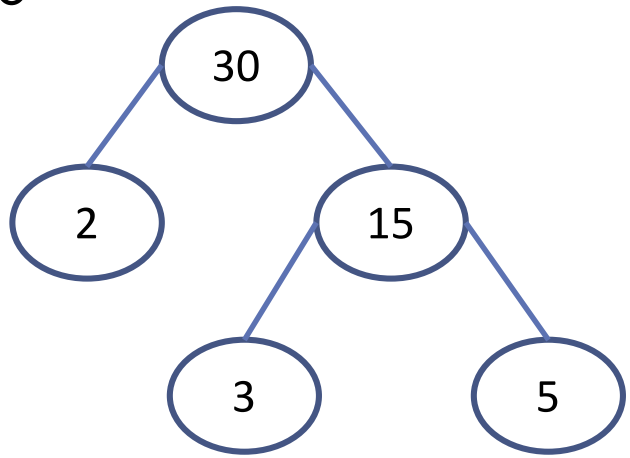
  * divisiones entre factores primos sucesivos

- Diagramas de árbol

  Consiste en identificar dos o más números que multiplicados entre si den el número original, sin importar si son primos o no. Luego se anotan bajo el número inicial como si fueran ramas en un árbol y se procede de la misma manera para cada uno de ellos.

Teorema Fundamental Aritmética

- Factorización completa mediante diagramas de árbol
- Ejemplo: Factorizar 30



- Todos los nuevos números en las hojas son primos y termina el proceso, representan la factorización completa
- La factorización completa de **30 = 2 x 3 x 5**

Teorema Fundamental Aritmética

- Factorización completa mediante divisiones entre factores primos sucesivos

  Consiste en hacer divisiones enteras sucesivas por números primos hasta llegar al número 1

  En cada paso se usa el resultado de la división anterior como dividendo y se anota el divisor utilizado
- Ejemplo: Factorizar 30

  30 / 2 = 15

  15 / 3 = 5

  5 / 5 = 1

  La factorización completa de 30 es la lista de los divisores utilizados. 30 = 2 x 3 x 5

Ejercicios

...