

Conceptos básicos de Geometría

Dr. Eduardo A. RODRÍGUEZ TELLO

CINVESTAV-Tamaulipas

15 de enero del 2013



Cinvestav

1 Conceptos básicos de Geometría

- Geometría Afín
- Geometría Euclidiana
- Orientación de puntos
- Áreas y ángulos



Geometría Afín

- Existen diferentes sistemas geométricos que pueden ser usados para expresar algoritmos geométricos:
 - Geometría Afín
 - Geometría Euclidiana
 - Geometría Proyectiva
 - Geometría Analítica
- Durante el cuatrimestre trabajaremos principalmente con Geometría Afín y Euclidiana
- Comenzaremos por definir algunos conceptos básicos de la Geometría Afín



Geometría Afín

- Una Geometría Afín consiste de:
 - Un conjunto de escalares (números reales)
 - Un conjunto de puntos
 - un conjunto de vectores
- Los puntos son usados para especificar posición
- Los vectores son usados para especificar dirección y magnitud, pero no tiene posición fija en el espacio (en contraste con la álgebra lineal donde no hay distinción entre puntos y vectores)



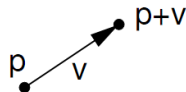
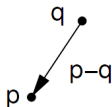
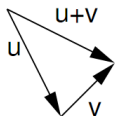
Geometría Afín

- Las siguientes operaciones pueden ser efectuadas sobre escalares, puntos o vectores.
- Las operaciones de Vectores son como las realizadas en álgebra lineal
- Es posible restar dos puntos
- La resta de dos puntos $p - q$ resulta en un vector dirigido de q a p .
- También es posible sumar un punto a un vector $p + v$ dando como resultado que el punto sea trasladado por v de p



Geometría Afín

- Sea S un escalar, V un vector y P un punto, las siguientes son las operaciones legales en Geometría Afín:
 - $S \cdot V \rightarrow V$ multiplicación escalar y vector
 - $V + V \rightarrow V$ suma de vectores
 - $P - P \rightarrow V$ resta de puntos
 - $P + V \rightarrow P$ suma punto y vector



Geometría Afín

- A partir de las operaciones anteriores es posible derivar muchas otras
- Por ejemplo, se puede definir la resta de dos vectores $\vec{u} - \vec{v}$ como $\vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$
- O la división de un vector y un escalar \vec{v}/α como $(1/\alpha) \cdot \vec{v}$ dado que $\alpha \neq 0$
- Existe un vector especial $\vec{0}$, llamado *vector cero*, el cual no tiene magnitud por lo tanto $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- No es posible multiplicar un punto por un escalar o sumar dos puntos juntos.



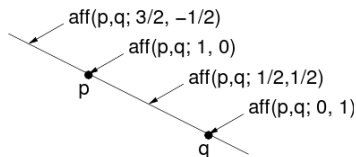
Geometría Afín

- Sin embargo, hay una operación que combina estos dos elementos, llamada combinación afín
- Dados dos puntos p_0 , p_1 y dos escalares α_0 y α_1 , tales que $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, la combinación afín se define como:
- $aff(p_0, p_1; \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 = p_0 + \alpha_1(p_1 - p_0)$
- El término de en medio de la ecuación no es una operación legal en Geometría Afín. Pero de esta forma es como se expresa típicamente la combinación afín (promedio ponderado de dos puntos)
- El término derecho si es válido



Geometría Afín

- Es importante observar que si $p_0 \neq p_1$ entonces el punto $\text{aff}(p_0, p_1; \alpha_0, \alpha_1)$ cae en la línea que une p_0 y p_1
- Dado que α_1 varia de $-\infty$ a ∞ éste traza todos los puntos en esta línea



Geometría Afín

- En el caso especial donde $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$, $aff(p_0, p_1; \alpha_0, \alpha_1)$ es un punto que subdivide el segmento de línea $\overline{p_0p_1}$ en dos segmentos de tamaños relativos α_1 a α_0
- La operación resultante se llama *combinación convexa*
- El conjunto de todas las combinaciones convexas traza el segmento de línea $\overline{p_0p_1}$



Geometría Afín

- Es fácil extender ambos tipos de combinaciones a más de dos puntos, al agregar la condición que la suma $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$:
- $aff(p_0, p_1, p_2; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = p_0 + \alpha_1(p_1 - p_0) + \alpha_2(p_2 - p_0)$
- El conjunto de todas las combinaciones afines de 3 puntos (no colineales) genera un plano
- El conjunto de todas las combinaciones convexas de 3 puntos genera todos los puntos del triángulo definido por los puntos
- Éstos son llamados cerradura afín y cerradura convexa de los puntos respectivamente



Geometría Euclidiana

- En Geometría Afín no existen algún medio para manejar los conceptos de ángulos y distancias
- La Geometría Euclidiana es una extensión de la Geometría Afín que incluye una operación adicional, llamada *producto interior*
- El producto interior mapea dos vectores de reales (no puntos) en un real no negativo
- Un ejemplo de un producto interior es el *producto punto*



Geometría Euclidiana

- Supongamos que los vectores d -dimensionales \vec{u} y \vec{v} son representados por los vectores de coordenadas (no homogéneas) (u_1, u_2, \dots, u_d) y (v_1, v_2, \dots, v_d)
- Entonces el producto punto de \vec{u} y \vec{v} se define de la siguiente manera:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^d u_i v_i \quad (1)$$



Geometría Euclidiana

- El producto punto sirve además para calcular otras identidades
- La *longitud* de un vector \vec{v}

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

- La *normalización* de un vector no negativo \vec{v} , denotada \hat{v} , se define como un vector de longitud unitaria que apunta en la misma dirección que \vec{v}

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (3)$$

- La *distancia entre puntos*, denotada como $dist(p, q)$ o $\|pq\|$, es la longitud del vector entre ellos $\|p - q\|$



Geometría Euclidiana

- El *ángulo* entre dos vectores no negativos \vec{u} y \vec{v} (con un rango entre 0 y π) es:

$$\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right) = \cos^{-1}(\hat{u} \cdot \hat{v}) \quad (4)$$

- A partir de esta ecuación es posible derivar fácilmente la ley de cosenos



Orientación de puntos

- Existe una operación sobre los puntos que es análoga a las operaciones relacionales $<$, $=$ y $>$ con números
- No parece haber una forma intrínsecamente natural para comparar dos puntos en un espacio d -dimensional
- Pero existe una relación, llamada *orientación*, entre $(d + 1)$ -tuplas ordenadas de puntos en un espacio d -dimensional
- La orientación extiende la noción de relaciones binarias en un espacio 1-dimensional



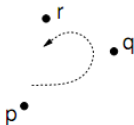
Orientación de puntos

- Dada una tripleta ordenada de puntos $\langle p, q, r \rangle$ en el plano, decimos que tienen una orientación positiva si definen un triángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj
- Tienen una orientación negativa si forman un triángulo en sentido de las manecillas del reloj
- Y una orientación cero si son colineales (incluyendo el caso donde dos o más puntos son idénticos)
- Observemos que la orientación depende del orden en que los puntos son dados

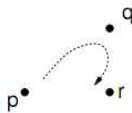


Orientación de puntos

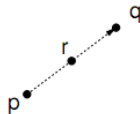
Orientación
positiva



Orientación
negativa



Orientación
cero



Orientación de puntos

- La orientación se define formalmente como el signo del determinante de los puntos dados en coordenadas homogéneas, es decir al agregar un 1 a cada coordenada
- Por ejemplo, en el plano se define

$$\text{Orient}(p, q, r) = \det \begin{pmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{pmatrix} \quad (5)$$



Orientación de puntos

- Observemos que en el caso de un espacio 1-dimensional $Orient(p, q)$ es el resultado de $q - p$
- Por lo tanto $Orient(p, q)$ puede tomar 3 valores diferentes:
 - Positiva si $p < q$
 - Cero si $p = q$
 - Negativa si $p > q$



Orientación de puntos

- Es importante resaltar que el signo de la orientación de una tripleta ordenada permanece sin cambio si los puntos son trasladados, rotados, o escalados (por un factor positivo)
- La transformación de una reflexión $f(x, y) = (-x, y)$, cambia el signo de la orientación
- En general, al aplicar cualquier transformación afín a los puntos altera el signo de la orientación de acuerdo al signo de la matriz usada en la transformación



Áreas y ángulos

- El determinante $Orient(p, q, r)$ es igual al doble del área (con signo) del triángulo $\triangle pqr$ (positiva si \curvearrowright y negativa si \curvearrowleft)
- Por lo tanto el área del triángulo puede ser determinada al dividir esta cantidad por 2
- En general, en un espacio d -dimensional el área de un símplex (un símplex o d -símplex es el análogo en d dimensiones de un triángulo) acotado por $d + 1$ puntos puede ser determinada tomando este determinante y dividiéndolo por $d!$
- Dada la capacidad de calcular el área de cualquier triángulo (o símplex en dimensiones más grandes), es posible calcular el volumen de cualquier polígono (o poliedro), dada una subdivisión apropiada en estos elementos básicos



Áreas y ángulos

- En Geometría Euclidiana, el producto punto, la longitud y los ángulos están relacionados.
- Para un vector \vec{u} el producto punto $\vec{u} \cdot \vec{u}$ es igual al cuadrado de la longitud (o magnitud) de \vec{u}

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (6)$$

- De manera más general, si \vec{v} es otro vector

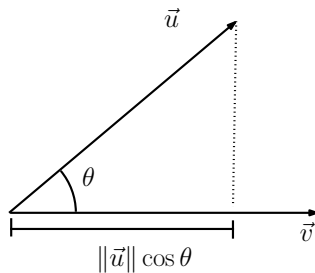
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad (7)$$

- Por lo tanto, dados dos vectores, el ángulo θ entre ellos puede encontrarse despejando la Fórmula 7

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$



Áreas y ángulos



Áreas y ángulos

- La desventaja del coseno es que no permite distinguir ángulos positivos de los negativos
- Por otra parte el seno del ángulo $\theta = \angle pqr$ (el ángulo con signo del vector $p - q$ al vector $r - q$) puede ser calculado así:

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\text{Orient}(q, p, r)}{\|p - q\| \|r - q\|} \right) \quad (9)$$

- Conociendo el seno y coseno de un ángulo podemos determinar sin ambigüedad dicho ángulo

