Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones

Dr. Eduardo A. RODRÍGUEZ TELLO

CINVESTAV-Tamaulipas

1 de febrero del 2013

1. Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones
   - Politopos
   - Grafo de incidencia
   - Polaridad

- El material de la clase de hoy está basado en algunos capítulos del siguiente libro:
- Algorithmic Geometry, Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec, Cambridge University Press (August 21, 2008).
- Este libro lo pueden encontrar en la siguiente URL:
- `http://www.tamps.cinvestav.mx/~ertello/gc/algGeo.tgz`

Politopos

- El día de hoy vamos a estudiar las cubiertas convexas en 3 o más dimensiones
- Aunque las dimensiones superiores a 3 pueden parecer poco comunes, veremos que muchos problemas de optimización geométrica puede ser resueltos como una búsqueda sobre un politopo en un espacio d-dimensional
- d puede ser mayor que 3

Politopos

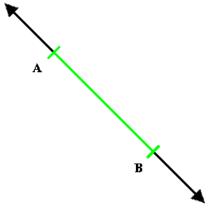
- Antes de profundizar en esto, primero presentaremos algunos conceptos básicos
- Definimos un d-politopo como la cubierta convexa de un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^d$
- Decimos que un conjunto de k puntos es afínmente independiente si ningún punto puede ser expresado como una combinación afín de los demás, es decir, una combinación lineal cuyos coeficientes suman 1

Politopos

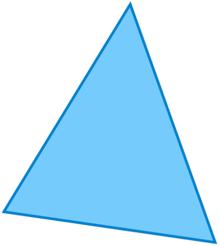
- Por ejemplo, 3 puntos son afínmente independientes si no están en la misma línea, 4 puntos son afínmente independientes si no están en el mismo plano, y así sucesivamente
- La cubierta convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes es llamada símplex o k-símplex
- Por ejemplo, el segmento de línea que une dos puntos es un 1-símplex, el triángulo definido por tres puntos es un 2-símplex, y el tetraedro definido por cuatro puntos es un 3-símplex

Politopos

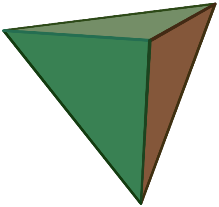
1-símplex



2-símplex



3-símplex



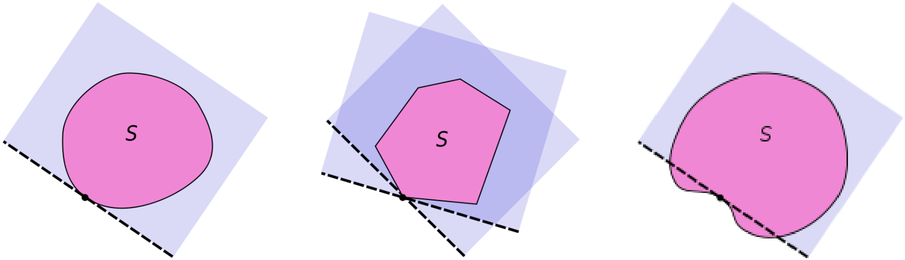
Politopos

- Cualquier hiperplano $(d-1)$-dimensional h en un espacio d-dimensional divide a este espacio en semiespacios (abiertos), denotados h^- y h^+
- Por lo tanto $\mathbb{R}^d = h^- \cup h \cup h^+$
- Definamos $\overline{h^-} = h^- \cup h$ y $\overline{h^+} = h^+ \cup h$ como la cerradura de estos semiespacios
- Decimos entonces que un hiperplano *soporta* un politopo S (hiperplano de soporte de S) si $h \cap S$ no es vacío y S está contenido completamente en $\overline{h^-}$ o $\overline{h^+}$

Cinvestav

Politopos

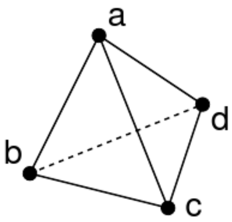
- Hiperplano de soporte de S



Politopos

- La intersección del politopo y cualquier hiperplano de soporte es llamada una *cara* de S
- Las caras 0-dimensionales son llamadas *vértices*, las 1-dimensionales *aristas* y las $(d-1)$-dimensionales *facetas*
- Cuando se habla de politopos en 3 dimensiones, la gente comúnmente usa el término *cara* cuando quieren referirse en realidad a una *faceta*
- Sin embargo, el contexto permite distinguir claramente el concepto al que se refieren

Politopos



- Tetraedro
- Vértices: a, b, c, d
- Aristas: ab, ac, ad, bc, bd, cd
- Facetas: abc, abd, acd, bcd

Politopos

- Las caras de dimensiones 0 a $d-1$ son llamadas *caras propias*
- Necesitamos definir dos caras adicionales
- El conjunto vacío es considerado una cara de dimensión -1
- El politopo entero es considerado una cara de dimensión d
- Nos referiremos a todas las caras, incluyendo éstas últimas como las *caras impropias* del politopo

Politopos

- Hay una serie de hechos que se derivan de estas definiciones:
    - La frontera de un politopo es la unión de sus caras propias
    - Un politopo tiene un número finito de caras, cada cara es un politopo
    - Un politopo es la cubierta convexa de sus vértices
    - Un politopo es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados

Politopos

- Observemos que un d-símplex tiene particularmente una estructura regular de caras
- Sean $v_0, v_1, \ldots, v_d$ los vértices de dicho símplex, entonces para cada par $\{v_i, v_j\}$ existe una arista del símplex uniendo estos vértices
- Y para cada tripleta $\{v_i, v_j, v_k\}$ existe una 3-cara uniendo estos tres vértices, y así sucesivamente

Politopos

- Generalizando tenemos que el número de caras j-dimensionales en un d-símplex es igual al número de subconjuntos de $(j+1)$ elementos de un dominio de tamaño $d+1$, eso es:

$$\binom{d+1}{j+1} = \frac{(d+1)!}{(j+1)!(d-j)!} \tag{1}$$

1. Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones
   - Politopos
   - Grafo de incidencia
   - Polaridad

Grafo de incidencia

- ¿Cómo son representados los politopos?
- Además de las características geométricas del politopo (e.g., los coordenadas de sus vértices o la ecuación de sus caras) es útil almacenar la información discreta de la conectividad, la cual es llamada a menudo la topología del politopo
- Hay muchas representaciones para los politopos
- En 2 dimensiones, una simple lista circular de los vértices es suficiente

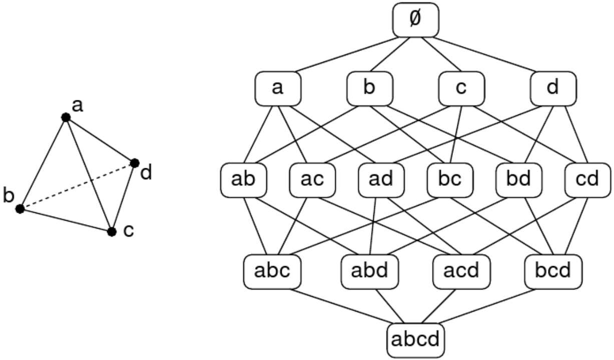
Grafo de incidencia

- En 3 dimensiones, necesitamos una estructura de tipo grafo
- Muchas estructuras de datos se han propuesto, y se han evaluado en base a la facilidad con la cual el politopo puede ser recorrido y la cantidad de memoria requerida
- Algunos ejemplos incluyen las estructuras de datos conocidas como *winged-edge*, *quad-edge*, y *half-edge*

Grafo de incidencia

- Una estructura muy útil para manejar politopos en dimensiones arbitrarias es el grafo de incidencia
- Cada nodo del grafo de incidencia corresponde a una cara (impropia) del politopo
- Se dibuja un arco entre dos caras si su dimensión difiere en 1, y una (de dimensión más baja) está contenida dentro de la otra (de dimensión más alta)
- En la siguiente diapositiva observaremos un ejemplo para un símplex

Grafo de incidencia



1. Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones
   - Politopos
   - Grafo de incidencia
   - Polaridad

Polaridad

- Existen dos maneras naturales para crear politopos
- Una es como la cubierta convexa de un conjunto de puntos
- La otra es como la intersección de una colección de semiespacios cerrados (asumiendo que está acotada)
- Estos dos conceptos son esencialmente idénticos, y ésto pude ser observado mediante la **transformación polar**, la cual mapea puntos a hiperplanos y vice versa

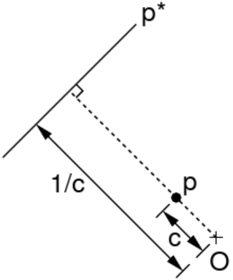
Polaridad

- Fijemos cualquier punto O en un espacio d-dimensional
- Podemos ver a O como el origen, y por lo tanto, cualquier punto $p \in \mathbb{R}^d$ puede ser visto como un vector con d elementos
- Si O no es el origen, entonces p puede ser identificado como el vector $p - O$
- El *hiperplano polar* de p, denotado p^*, está definido por la siguiente expresión:

$$p^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (p \cdot x) = 1\} \tag{2}$$

Polaridad

- Observemos que si p está en un esfera unitaria con centro en O, entonces p^* es un hiperplano que pasa por p y es ortogonal al vector $\overline{Op}$
- Conforme alejamos p del origen a lo largo de este vector, el hiperplano dual se acerca al origen, y vice versa
- De esta forma el producto de sus distancias a partir del origen es siempre 1



Polaridad

- Ahora, sea h cualquier hiperplano que no contiene O
- El *polo* de h, denotado h^* es el punto que satisface la siguiente expresión:
$$(h^* \cdot x) = 1 \quad \forall\, x \in h \tag{3}$$
- Esta doble transformación punto a hiperplano e hiperplano a punto es una involución, es decir, $(p^*)^* = p$ y $(h^*)^* = h$

Polaridad

- La transformación polar preserva importantes relaciones geométricas
- Dado un hiperplano h, definamos

$$h^{+} = \{x \in \mathbb{R}^{d} \mid (x \cdot h^{*}) < 1\} \tag{4}$$

$$h^{-} = \{x \in \mathbb{R}^{d} \mid (x \cdot h^{*}) > 1\} \tag{5}$$

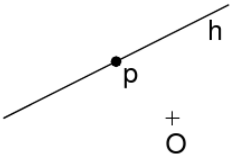
- Eso es, h^{+} es el semiespacio abierto que contiene el origen y h^{-} es el otro semiespacio abierto para h

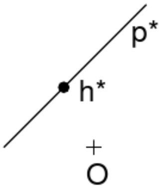
Polaridad

- Sea p cualquier punto en $\mathbb{R}^d$ y h cualquier hiperplano en $\mathbb{R}^d$
- La transformación polar satisface las siguientes dos propiedades:
  - Preservación de incidencia
  - Inversión de inclusión

Polaridad

- **Preservación de incidencia:** La transformación de polaridad preserva las relaciones de incidencia entre puntos e hiperplanos. Es decir, p pertenece a h si y sólo si h^* pertenece a p^*





Polaridad

- **Inversión de inclusión:** La transformación de polaridad invierte las relaciones de posición relativa en el sentido que p pertenece a h^+ si y sólo si h^* pertenece a $(p^*)^+$, y p pertenece a h^- si y sólo si h^* pertenece a $(p^*)^-$

Polaridad

- En general, cualquier transformación biyectiva que preserva las relaciones de incidencia es llamada una **dualidad**
- Por lo tanto, la polaridad es una dualidad
- Ahora podemos formalizar la noción de equivalencia de politopos
- La idea es de transformar un politopo definido como la cubierta convexa de un conjunto finito de puntos a un politopo definido como la intersección de un conjunto finito de semiespacios cerrados

Polaridad

- Para hacer esto, necesitamos una forma de mapear un punto a un semiespacio
- Nuestro enfoque será tomar el semiespacio que contiene el origen
- Para cualquier punto $p \in \mathbb{R}^d$ definimos el siguiente semiespacio cerrado basado en su transformación polar:

$$p^{\#} = \overline{p^{*+}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x \cdot p) \leq 1\} \tag{6}$$

Polaridad

- Observemos que si el semiespacio h^+ contiene p, entonces por la propiedad de inversión de inclusión de la polaridad, el punto polar h^* está contenido dentro de $p^\#$
- Ahora, para cualquier conjunto de puntos $P \subseteq \mathbb{R}^d$, definimos su **imagen polar** como la intersección de estos semiespacios

$$P^\# = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x \cdot p) \leq 1, \forall p \in P\} \tag{7}$$

- Por lo tanto $P^\#$ es la intersección de un conjunto (infinito) de semiespacios cerrados, uno para cada punto $p \in P$
- Como un semiespacio es convexo y la intersección de conjuntos convexos también es convexa, entonces $P^\#$ es un conjunto convexo

Polaridad

- Para ver la conexión con las cubiertas convexas, definamos $S = \{p_1, \cdots, p_n\}$ como un conjunto puntos y $P = conv(S)$
- Asumamos que el origen O está contenido en P. (podemos garantizar esto de diferentes maneras, e.g., trasladando P de forma que su centro de masa coincida con el origen)
- Por definición, la cubierta convexa es la intersección del conjunto de todos los semiespacios cerrados que contengan S
- Es decir, P es la intersección de un conjunto infinito de semiespacios cerrados

Polaridad

- ¿Cuáles son estos semiespacios?
- Si h^+ es un semiespacio que contiene todos los puntos de S, entonces por la propiedad de inversión de inclusión de la polaridad, el punto polar h^* está contenido en todos los hiperplanos $\overline{p_i^{*+}}$
- Esto implica que $h^* \in P^\#$
- Lo anterior significa que, a través de la polaridad, los semiespacios cuya intersección es la cubierta convexa de un conjunto de puntos es esencialmente equivalente a los puntos polares que caen dentro de la imagen polar de la cubierta convexa

Polaridad

Cubierta convexa

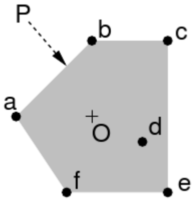
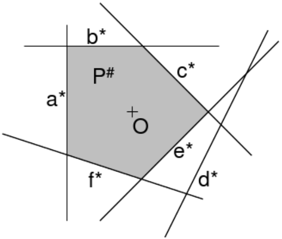


Imagen polar



Polaridad

Lema

- Sea $S = \{p_1, \cdots, p_n\}$ un conjunto puntos en $\mathbb{R}^d$ y $P = conv(S)$. Entonces su imagen polar es la intersección de los semiespacios polares correspondientes, eso es:

$$P^{\#} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{p_i^{*+}} \tag{8}$$

- Además
  1. Un punto $a \in \mathbb{R}^d$ cae en la frontera de P si y sólo si el hiperplano polar a^* soporta a $P^{\#}$
  2. Cada k-cara de P corresponde a una $(d-1-k)$-cara de $P^{\#}$ y dadas las caras f_1, f_2 de P donde $f_1 \subseteq f_2$, las caras correspondientes $f_1^{\#}, f_2^{\#}$ de $P^{\#}$ satisfacen $f_1^{\#} \supseteq f_2^{\#}$ (i.e., las relaciones de inclusión están invertidas)

Polaridad

- No es difícil probar que la imagen polar de un politopo es una involución, i.e. $(P^{\#})^{\#} = P$ (revisar libro de Boissonnat para las demostraciones)
- Así, la imagen polar $P^{\#}$ de un politopo es estructuralmente isomorfa a P y todas las relaciones afínes en P mapean a través de la polaridad a $P^{\#}$
- Desde una perspectiva computacional, esto significa que calculamos la polaridad de todos los puntos de P, considerando los semiespacios que contienen el origen, y tomando la intersección de estos semiespacios.

Polaridad

- Por lo tanto, los problemas de calcular cubiertas convexas y de calcular la intersección de semiespacios son computacionalmente equivalentes
- De hecho, una vez que se ha calculado el grafo de incidencia para uno, sólo se voltea para conseguir el otro
- Por ejemplo, si se conocen los sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecahedro, e icosahedro), se puede recordar que el cuadrado y el octaedro son duales polares, el dodecahedro y el icosohedro son duales polares, y el tetraedro es auto-dual