Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones (cont.)

Dr. Eduardo A. Rodríguez Tello

Cinvestav-Tamaulipas

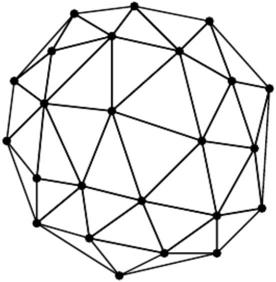
8 de febrero del 2013

1. Politopos y cubiertas convexas en 3 o más dimensiones
   - Politopos simples y simpliciales
   - Combinatoria de politopos

- El material de la clase de hoy está basado en algunos capítulos del siguiente libro:
- Algorithmic Geometry, Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec, Cambridge University Press (August 21, 2008).
- Este libro lo pueden encontrar en la siguiente URL:
- `http://www.tamps.cinvestav.mx/~ertello/gc/algGeo.tgz`

Politopos simples y simpliciales

- Si un politopo es la cubierta convexa de un conjunto de puntos en posición general, entonces para $0 \leq j \leq d-1$, cada j-cara es un j-símplex
- Un politopo es **simplicial** si todas sus caras propias son símplexes (o simplices)

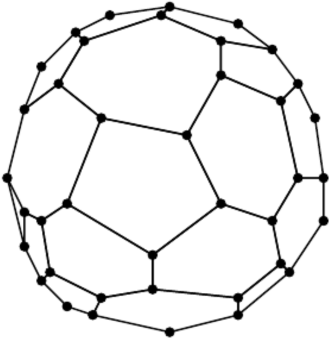


Politopos simples y simpliciales

- Desde el punto de vista de dualidad, un politopo es considerado como la intersección de un conjunto de n semiespacios en posición general
- Entonces cada j-cara es la intersección de exactamente $(d - j)$ hiperplanos
- Un politopo se dice que es **simple** si cada j-cara es la intersección de exactamente $(d - j)$ hiperplanos

Politopos simples y simpliciales

- En particular, esto implica que cada vértice es incidente a exactamente d facetas
- El siguiente es un ejemplo de politopo simple



Politopos simples y simpliciales

- Además, cada j-cara puede ser identificada de manera única con un subconjunto de $d - j$ hiperplanos, cuya intersección define la cara
- Bajo esta misma lógica el número máximo de vértices en dicho politopo es aproximadamente (ingenuamente) $O(n^d)$
- Veremos más adelante que una cota más exacta es $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$
- De los resultados de polaridad se desprende que un politopo es simple si y sólo si su polar es simplicial

Politopos simples y simpliciales

- Una observación importante acerca de los politopos simples es que la región local al rededor de cada vértice es equivalente a un vértice de un símplex
- En particular si cortamos un vértice de un politopo simple con un hiperplano que está arbitrariamente cerca de él, la pieza que fue cortada es un d-símplex
- Es simple demostrar que entre todos los politopos con un número fijo de vértices, los politopos simpliciales maximizan el número de caras de todos los grados altos (de otra forma habría degeneraciones entre los vértices)
- Dualmente, entre todos los politopos con un número fijo de facetas, los politopos simples maximizan el número de caras de todos los grados bajos

Politopos simples y simpliciales

- Existe otra observación que nos permite dar cotas en cuanto al número de caras de varias dimensiones
- Considere un politopo simplicial con n vértices
- Cada $(j-1)$-cara puede ser identificada de manera única con un subconjunto de j puntos cuya cubierta convexa forme esta cara
- Por supuesto, a menos que el politopo sea un símplex, no todos estos subconjuntos resultarán en una cara
- Sin embargo esto produce las siguientes cotas aproximadas (ingenuas) con respecto al número de caras en varias dimensiones

Politopos simples y simpliciales

Lema (Cotas aproximadas)

1. El número de caras de dimensión j de un politopo con n vértices es a lo más
$$\binom{n}{j+1}$$
2. El número de caras de dimensión j de un politopo con n facetas es a lo más
$$\binom{n}{d-j}$$

- Estas cotas no son estrictas. Las cotas estrictas podrían derivarse usando relaciones más sofisticadas en el número de caras en varias dimensiones, llamadas *relaciones de Dehn-Sommerville*
- No cubriremos este tema, pero veremos más adelante el *Teorema de la Cota Superior* (Upper Bound Theorem)

Cinvestav

Combinatoria de politopos

- Sea P un d-politopo. Para $-1 \leq k \leq d$, sea $n_k(P)$ el número de k-caras de P
- Claramente $n_{-1}(P) = n_d(P) = 1$
- El número de caras de otras dimensiones generalmente satisfacen el número de relaciones combinatorias
- La más simple de éstas es la llamada *relación de Euler*

Combinatoria de politopos

Teorema (Relación de Euler)

- Dado cualquier d-politopo P tenemos que

$$\sum_{k=-1}^{d} (-1)^k n_k(P) = 0$$

- Esto indica que la sumatoria alternada de los números de caras es igual a cero

- Por ejemplo, un cubo tiene 8 vértices, 12 aristas, 6 facetas, y junto con las caras de dimensión -1 y d tenemos

$$-1 + 8 - 12 + 6 - 1 = 0$$

Combinatoria de politopos

- Aunque la prueba formal de la relación de Euler es algo compleja, existe una forma muy fácil de ver porque es verdadera
- Primero, consideremos el politopo más simple, llamado un d-símplex, como caso base
- Esto es fácil de ver si recordamos que para una símplex $n_j = \binom{d+1}{j+1}$
- Si tomamos la expresión $(1-1)^{d+1}$ y la expandemos simbólicamente (como haríamos con $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)
- obtendríamos exactamente la sumatoria de la fórmula de Euler

Cinvestav

Combinatoria de politopos

- Claramente $(1-1)^{d+1} = 0$
- El paso inductivo de la prueba viene de observar que obtener un politopo complejo a partir de uno simple, esencialmente involucra una serie de operaciones de división
- Cada vez que se divide una cara de dimensión j, se hace agregando una cara de dimensión $j-1$
- Por lo tanto, n_{j-1} y n_j cada uno incrementa en una unidad, y por esa razón el valor de la sumatoria alternada se mantiene sin cambio

Combinatoria de politopos

- La relación de Euler puede ser usada para probar que la cubierta convexa de un conjunto de n puntos en $\mathbb{R}^3$ tiene $O(n)$ aristas y $O(n)$ caras
- Sin embargo, ¿qué sucede cuando aumenta la dimensión?
- Probaremos el siguiente teorema, el cual enunciaremos tanto en su forma original como en su forma dual

Combinatoria de politopos

Teorema de la cota superior (Upper Bound Theorem)

- Un politopo definido por una cubierta convexa de n puntos en $\mathbb{R}^d$ tiene $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ facetas

Teorema de la cota superior (Forma Polar)

- Un politopo definido por la intersección de n semiespacios en $\mathbb{R}^d$ tiene $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ vértices

Combinatoria de politopos

Demostración

- No es difícil mostrar que entre todos los politopos, los politopos simpliciales maximizan el número de caras para un conjunto de vértices dado y que los politopos simples maximizan el número de vértices para un conjunto de caras
- Probaremos sólo la forma polar del teorema (la otra forma se puede obtener mediante equivalencia polar)
- Considere un politopo definido por la intersección de n semiespacios en posición general
- Supongamos por convención que el eje x_d es el eje vertical

Combinatoria de politopos

Demostración ...

- Dada una cara, sus vértice más alto y más bajo son aquellos que tienen la máxima y mínima coordenadas x_d, respectivamente
- La prueba está basada en colocar una carga en cada vértice
- Moveremos la carga de cada vértice a una cara incidente especialmente seleccionada, de forma tal que ninguna cara reciba más de dos cargas
- Finalmente mostraremos que el número de caras que reciben cargas es a lo más $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

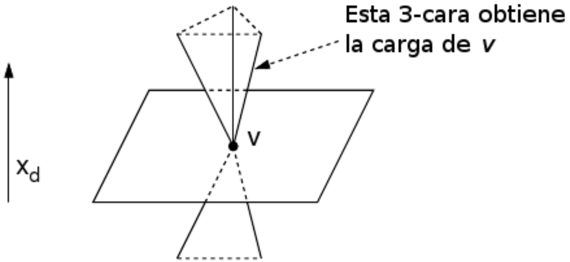
Combinatoria de politopos

Demostración ...

- Primero, tenemos que cada vértice v es el más alto o el más bajo vértice para una j-cara, donde $j \geq \lceil d/2 \rceil$
- Para ver esto, recordemos que para un politopo simple, el vecindario que rodea inmediatamente cualquier vértice es isomórfico a un símplex
- Por lo tanto, v es incidente a exactamente d aristas (1-caras)
- Considere un hiperplano horizontal (ortogonal a x_d) que pasa a través de v
- Dado que hay d aristas en total, al menos $\lceil d/2 \rceil$ de ellas deben caer en el mismo lado de este hiperplano

Combinatoria de politopos

- Prueba del teorema de la cota superior en dimensión 5. En este caso las tres aristas sobre v forman una 3-cara cuyo vértice más bajo es v



Combinatoria de politopos

Demostración ...

- Como observamos antes, el vecindario al rededor de cada vértice de un politopo simple es isomórfico a un símplex, lo que implica que hay una cara de dimensión al menos $\lceil d/2 \rceil$ que forma estas aristas y es incidente a v
- Por lo tanto, v es el más alto o más bajo vértice para esta cara
- Se agrega a esta cara la carga del vértice v
- Así que podemos cargar cada vértice del politopo a la cara de dimensión al menos $\lceil d/2 \rceil$, y cada cara de esas será cargada a lo más dos veces (una para el vértice más alto y otra para el más bajo)

Combinatoria de politopos

Demostración ...

- Sólo resta contar el número de caras que fueron cargadas y multiplicar por 2
- Recordemos que el lema de las cotas aproximadas (ingenuas) dice que el número de j-caras de un politopo simple con n facetas es a lo más $\binom{n}{d-j}$
- Cada j-cara surge de la intersección de $d-j$ hiperplanos y ese es el número de subconjuntos de hiperplanos con $(d-j)$ elementos
- Sumando esto para todas las caras de dimensión $\lceil d/2 \rceil$ o mayor tenemos que el número de vértices es a lo más

$$2\sum_{j=\lceil d/2 \rceil}^{d} \binom{n}{d-j}$$

Combinatoria de politopos

Demostración ...

- Cambiando el índice de la sumatoria a $k = d - j$ y considerando que $\binom{n}{k}$ es $O(n^k)$, tenemos que el número de vértices es al más

$$2 \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} O(n^k)$$

- Esto es una serie geométrica, por lo tanto está dominada asintóticamente por su término más grande

- Por lo tanto el número de cargas, i.e., el número de vértices es a lo más

$$O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$$

$\square$

Combinatoria de politopos

- La cota anterior es estricta
- Hay una familia de politopos, llamados politopos cíclicos, los cuales llegan a esta cota asintótica (ver libro de Boissonnat e Yvinec)