Triangulación de polígonos

Dr. Eduardo A. Rodríguez Tello

Cinvestav-Tamaulipas

26 de febrero del 2013

- El material de la clase de hoy está basado en el capítulo 3 del libro: Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld and Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 3rd edition (April 16, 2008), ISBN-10: 3540779736.

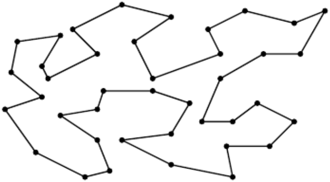
Problema de triangulación de polígonos

- Triangulación es el problema general de subdividir un dominio espacial en símplexes (o simplices), lo que en el plano significa triángulos
- Para triangular un polígono simple (cuyos lados no se intersectan) $\mathcal{P}$ es necesario dibujar diagonales entre pares de sus vértices
- Una diagonal es un segmento de línea que conecta dos vértices de $\mathcal{P}$ y cae en el interior de dicho polígono

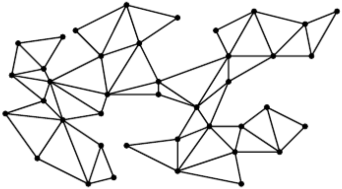
Cinvestav

Problema de triangulación de polígonos

Polígono simple



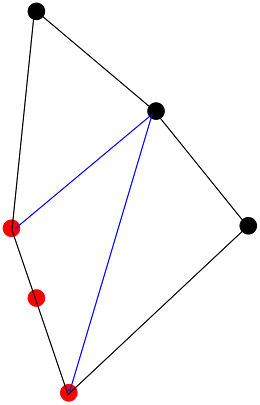
Triangulación

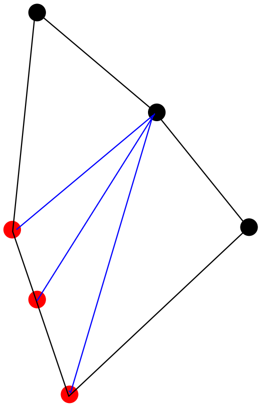


Problema de triangulación de polígonos

- De manera más formal la **triangulación** de un polígono es la descomposición de éste en triángulos utilizando para ello el conjunto máximo de diagonales que no se intersectan
- Se requiere que el conjunto de diagonales que no se intersectan sea máximo para garantizar que ningún triángulo tenga un vértice del polígono en el interior de una de sus aristas
- Esto podría suceder si el polígono tiene tres vértices colineales consecutivos

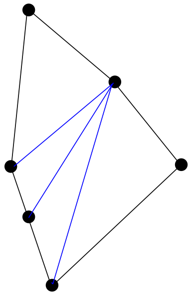
Problema de triangulación de polígonos





Problema de triangulación de polígonos

- Usualmente la triangulación de un polígono no es única
- Por ejemplo, el polígono de la siguiente figura puede ser triangulado en al menos dos formas diferentes



Problema de triangulación de polígonos

- Hay dos pregunta que surgen naturalmente:
  1. ¿Existe siempre una triangulación para un polígono?
  2. ¿Cuántos triángulos pueden existir en una triangulación?

- El siguiente teorema responde a estas preguntas

Problema de triangulación de polígonos

Teorema

Todo polígono simple admite una triangulación, y toda triangulación de un polígono simple con n vértices consiste exactamente de $n - 2$ triángulos

Prueba

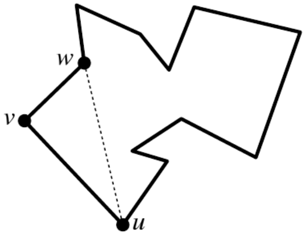
- Probaremos este teorema por inducción sobre n
- En el caso trivial cuando $n = 3$ el polígono en sí mismo es un triángulo por lo que el teorema se cumple
- Sea $n > 3$, asumamos que el teorema se cumple para toda $m < n$

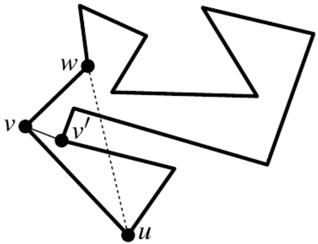
Problema de triangulación de polígonos

- Sea $\mathcal{P}$ un polígono con n vértices
- Probaremos primero la existencia de una diagonal en $\mathcal{P}$
- Sea v el vértice más a la izquierda de $\mathcal{P}$
- Sean u y w los dos vértices vecinos de v en la frontera $\mathcal{P}$
- Si el segmento abierto $\overline{uw}$ cae en el interior de $\mathcal{P}$, se ha encontrado una diagonal
- De lo contrario, hay uno o más vértices dentro del triángulo $\triangle uvw$, o en la diagonal $\overline{uw}$

Problema de triangulación de polígonos

- De esos vértices, sea v' el más alejado de la línea entre u y w
- El segmento conectando v' con v no puede intersectar una arista de $\mathcal{P}$, porque tal arista tendrá un punto extremo dentro del triángulo que está más lejos de la línea entre u y w, contradiciendo la definición de v'
- Por lo tanto, $\overline{vv'}$ es una diagonal





Problema de triangulación de polígonos

- Cualquier diagonal corta $\mathcal{P}$ en dos subpolígonos simples $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$
- Sea m_1 el número de vértices de $\mathcal{P}_1$ y m_2 el número de vértices de $\mathcal{P}_2$
- Tanto m_1 como m_2 deben ser más pequeños que n, por inducción $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ pueden entonces ser triangulados
- Así que $\mathcal{P}$ puede también ser triangulado

Problema de triangulación de polígonos

- Resta probar que cualquier triangulación de $\mathcal{P}$ consiste de $n-2$ triángulos
- Para este fin, consideremos una diagonal arbitraria en alguna triangulación $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$
- Esta diagonal corta $\mathcal{P}$ en dos subpolígonos con m_1 y m_2 vértices, respectivamente

Problema de triangulación de polígonos

- Cada vértice de $\mathcal{P}$ ocurre en exactamente uno de los dos subpolígonos, excepto por los vértices que definen la diagonal (ocurren en ambos subpolígonos)
- Por lo tanto, $m_1 + m_2 = n + 2$
- Por inducción, cualquier triangulación de $\mathcal{P}_i$ consiste de $m_i - 2$ triángulos, lo que implica que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ consiste de $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$ triángulos

$\square$

Problema de triangulación de polígonos

- Existe un algoritmo simple que corre en tiempo polinomial para resolver el caso planar del problema de triangulación
- Sin embargo, en el caso general de poliedros no convexos en dimensiones superiores los mejores algoritmos reportados corren en tiempo $O(n \log n)$

Problema de triangulación de polígonos

- El algoritmo que vamos a presentar hoy es un proceso de dos pasos
- El primero consiste en convertir un polígono arbitrario en una colección disjunta de *polígonos monótonos*
- El segundo paso aplica un algoritmo de triangulación a cada *polígono monótono* resultante del paso anterior
- El primer paso toma un tiempo $O(n)$
- El segundo paso corre en tiempo $O(n \log n)$, por lo que todo el algoritmo tiene complejidad $O(n \log n)$

Cinvestav

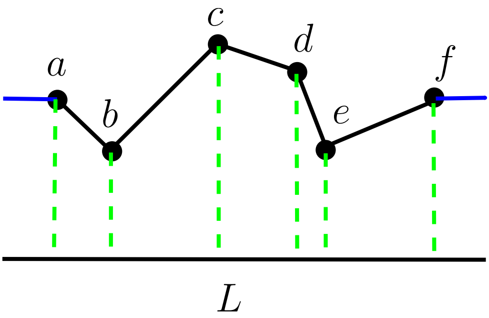
1. Triangulación de polígonos
   - Problema de triangulación de polígonos
   - Polígonos monótonos
   - Triangulación de polígonos monótonos
   - División de un polígono en subpolígonos monótonos
   - Ejemplo

Polígonos monótonos

- Una **cadena poligonal** C se dice que es **estrictamente monótona** con respecto a una determinada línea L, si cualquier línea que es ortogonal a L intersecta C como máximo en un punto
- Una **cadena** C es **monótona** con respecto a L si cada línea que es ortogonal a L intersecta C en un solo componente conectado
- Así, puede intersectar en un solo punto, o a lo largo de un solo segmento de línea.

Polígonos monótonos

- Ejemplo de una cadena monótona



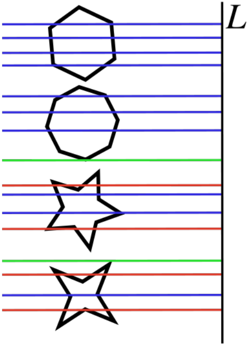
Polígonos monótonos

- Un **polígono** $\mathcal{P}$ se dice que es **monótono** con respecto a una línea L, si su frontera (a veces denotada $bnd(\mathcal{P})$ o $\partial\mathcal{P}$), puede dividirse en dos cadenas, cada una de las cuales es monótona con respecto a L

- Dicho de otra forma, un polígono $\mathcal{P}$ en el plano es llamado **monótono** con respecto a una determinada línea L, si cualquier línea que es ortogonal a L intersecta $\mathcal{P}$, como máximo dos veces

Polígonos monótonos

- Ejemplo de polígonos monótonos con respecto a una línea L



Polígonos monótonos

- En lo sucesivo vamos a considerar la monotonía (monotonicidad) con respecto al eje x
- Vamos a llamar a estos polígonos **horizontalmente monótonos**
- Es fácil comprobar si un polígono es horizontalmente monótono
- ¿Cómo?

Polígonos monótonos

- Los pasos a seguir son:
  1. Encontrar los vértices más a la izquierda y a la derecha del polígono (i.e. aquellos con la mínima y máxima coordenada x), en un tiempo $O(n)$
  2. Estos vértices permiten dividir la frontera del polígono en dos cadenas, una *cadena superior* y una *cadena inferior*. Se camina a lo largo de estas cadenas de izquierda a derecha, verificando que las coordenadas x sean no decrecientes. Esto toma un tiempo $O(n)$.

1. Triangulación de polígonos
   - Problema de triangulación de polígonos
   - Polígonos monótonos
   - Triangulación de polígonos monótonos
   - División de un polígono en subpolígonos monótonos
   - Ejemplo

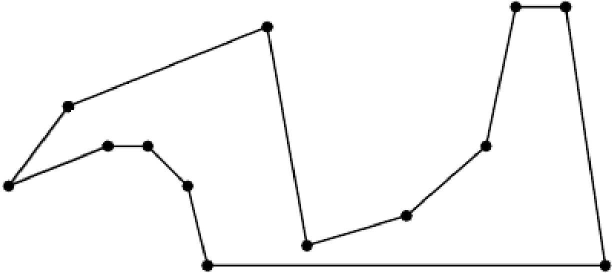
Triangulación de polígonos monótonos

- Podemos triangular un polígono monótono mediante una simple variación del método de barrido del plano
- Empezamos con la suposición de que los vértices del polígono han sido ordenados en orden creciente de sus coordenadas x
- Para simplificar asumimos que no hay coordenadas x duplicadas. En caso contrario, se rompe el empate entre las cadenas superior e inferior de forma arbitraria, y dentro de una cadena de modo que el orden de la cadena se preserve

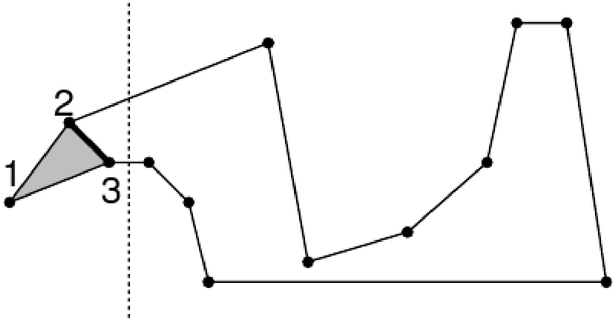
Triangulación de polígonos monótonos

- Observemos que para realizar esto no se requiere hacer un ordenamiento
- Podemos simplemente extraer la cadena superior e inferior y combinarlas (como se hace en el algoritmo *MergeSort*) en tiempo $O(n)$
- La idea detrás del algoritmo de triangulación es muy simple: Tratar de triangular todo lo que se pueda a la izquierda del vértice actual, añadiendo diagonales y retirar la región ya triangulada para evitar considerarla más adelante

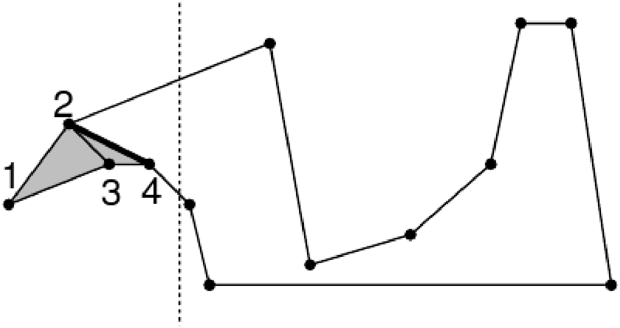
Triangulación de polígonos monótonos



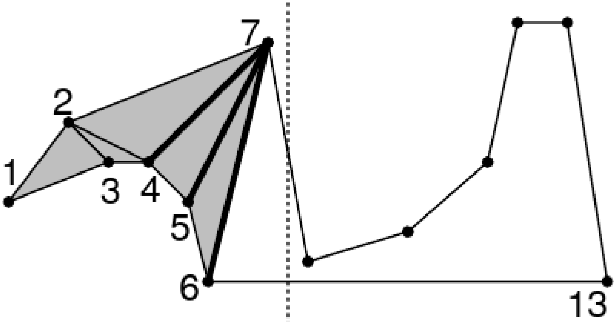
Triangulación de polígonos monótonos



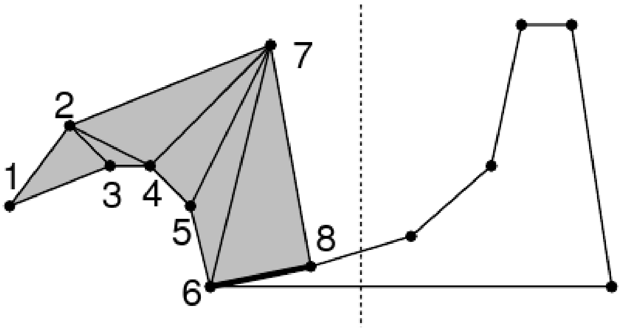
Triangulación de polígonos monótonos



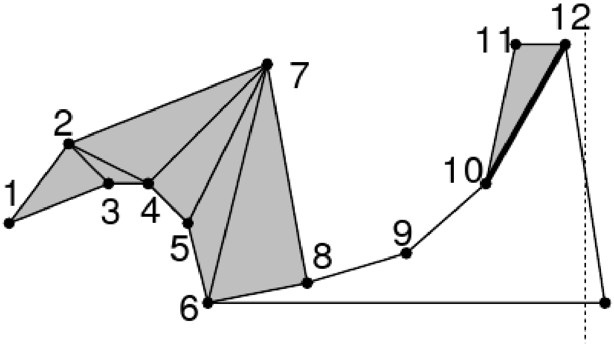
Triangulación de polígonos monótonos



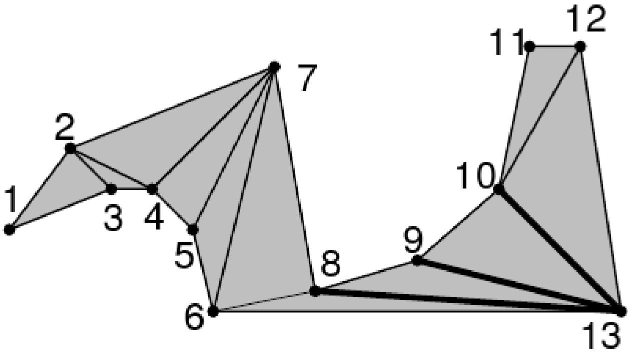
Triangulación de polígonos monótonos



Triangulación de polígonos monótonos



Triangulación de polígonos monótonos



Triangulación de polígonos monótonos

- Lo que hace este algoritmo eficiente es el hecho de que cuando llegamos a un vértice la región no triangulada que se encuentra a la izquierda de este vértice siempre tiene una estructura muy simple
- Esta estructura nos permite determinar en tiempo constante si es posible añadir otra diagonal
- Y, en general, podemos añadir cada diagonal adicional en tiempo constante
- Dado que cualquier triangulación consiste de $n - 3$ diagonales, el proceso se ejecuta en un tiempo total $O(n)$
- Esta estructura es descrita en el lema siguiente

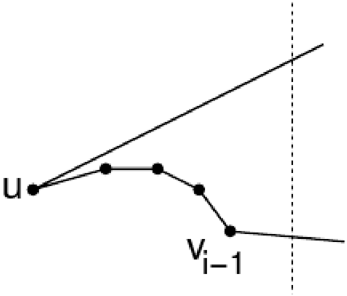
Triangulación de polígonos monótonos

Lema (Invariante principal)

- Para $i \geq 2$, sea v_i el vértice que acaba de ser procesado por el algoritmo de triangulación. La región no triangulada situada a la izquierda de v_i consiste de dos cadenas x-monótonas, una inferior y una superior, cada una con al menos una arista.
- Si la cadena de v_i a u tiene dos o más aristas, entonces estas aristas constituyen una *cadena reflejo* (es decir, una secuencia de vértices con todos los ángulos interiores de al menos 180 grados).
- La otra cadena consta de una sola arista cuyo punto extremo izquierdo es u y cuyo punto extremo derecho se encuentra a la derecha de v_i

Triangulación de polígonos monótonos

- Invariante inicial



Triangulación de polígonos monótonos

- Probaremos la invariante por inducción
- Como caso base, consideremos el caso de v_2. Aquí $u = v_1$, una cadena consiste de una arista única v_2v_1 y la otra cadena consiste de la otra arista adyacente a v_1
- Para demostrar la invariante principal, haremos un análisis de cómo manejar el próximo evento que involucra a v_i

Triangulación de polígonos monótonos

- Asumiremos que la invariante se mantiene en v_{i-1} y que ésta se cumple después de que cada evento ha sido procesado
- Existen los siguientes dos casos a los que el algoritmo debe hacer frente:
  1. v_i cae en la cadena opuesta a la que pertenece v_{i-1}
  2. v_i cae en la misma cadena que v_{i-1}

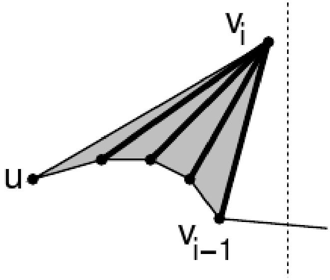
Triangulación de polígonos monótonos

Caso 1: v_i cae en la cadena opuesta a la que pertenece v_{i-1}

- En este caso añadimos diagonales que unan v_i a todos los vértices en la cadena reflejo, desde v_{i-1} hasta u (pero sin incluirlo)
- Tengamos en cuenta que todos estos vértices son **visibles** desde v_i
- Desde luego u es visible a vi
- Porque la cadena es reflejo, x-monótona, y se encuentra a la izquierda de v_i

Triangulación de polígonos monótonos

Caso 1



Triangulación de polígonos monótonos

- Además, la cadena en si misma no puede bloquear la visibilidad de v_i a otro vértice de la cadena
- Por último, el hecho de que el polígono es x-monótono implica que la parte sin procesar del polígono (que está a la derecha de v_i) no puede "volver" y bloquear la visibilidad de la cadena
- Después de hacer esto, fijamos $u = v_{i-1}$
- La invariante se mantiene, y la cadena reflejo es trivial pues consiste de una sola arista $v_i v_{i-1}$

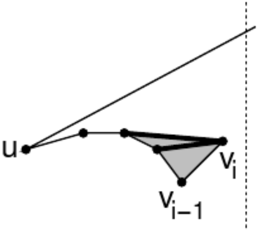
Triangulación de polígonos monótonos

Caso 2: v_i cae en la misma cadena que v_{i-1}

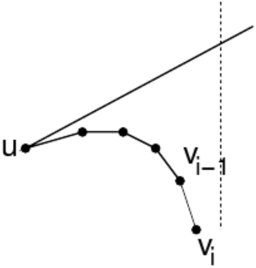
- Caminamos de vuelta a lo largo de la cadena reflejo añadiendo diagonales uniendo v_i a los vértices previos hasta que encontremos el primero que no sea visible a v_i
- Como puede verse en la siguiente figura, esto puede implicar:
  - a) Conectar v_i a uno o más vértices
  - b) No conectar v_i con ningún vértice adicional
- Esto en función de si el primer ángulo es inferior o superior a 180 grados

Triangulación de polígonos monótonos

Caso 2a



Caso 2b



Triangulación de polígonos monótonos

- En cualquier caso, los vértices que se han cortado por diagonales ya no están en la cadena, y v_i se convierte en el nuevo punto extremo de la cadena
- Una vez más, de la x-monotonía se desprende que la parte sin procesar del polígono no puede bloquear la visibilidad de v_i a la cadena
- Tengamos en cuenta que cuando se finaliza el resto de la cadena desde v_i a u es una cadena reflejo

Triangulación de polígonos monótonos

- ¿Cómo se implementa esto?
- Los vértices en la cadena reflejo pueden ser almacenados en una pila
- Mantenemos una bandera que indica si la pila está en cadena superior o en la inferior, y asumimos que para cada nuevo vértice se sabe a qué cadena del polígono pertenece
- Tengamos en cuenta que las decisiones acerca de la visibilidad puede basarse simplemente en pruebas de orientación involucrando v_i y los dos primeros elemento de la pila
- Cuando conectamos v_i con una diagonal, se tiene que retirar un elemento de la pila

Análisis de complejidad

- Hemos dicho que este algoritmo se ejecuta en tiempo $O(n)$
- Como mencionamos anteriormente, la lista ordenada de vértices puede construirse en un tiempo $O(n)$ a través de la combinación (*merge*)
- La cadena reflejo se almacena en una pila

Análisis de complejidad

- En un tiempo $O(1)$ por cada diagonal, podemos realizar una prueba de orientación para determinar si es necesario añadir la diagonal
- Suponiendo una **lista de aristas doblemente conectada** (*DCEL*) la diagonal puede ser agregada en tiempo constante
- Dado que el número de diagonales es $n - 3$, el tiempo total es $O(n)$

1. Triangulación de polígonos
   - Problema de triangulación de polígonos
   - Polígonos monótonos
   - Triangulación de polígonos monótonos
   - División de un polígono en subpolígonos monótonos
   - Ejemplo

División de un polígono en subpolígonos monótonos

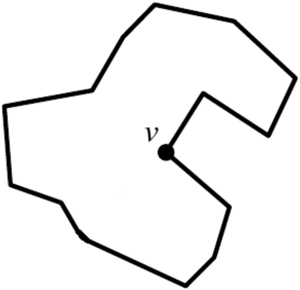
- Para poder ejecutar el algoritmo de triangulación antes descrito, en primer lugar hay que subdividir un polígono simple $\mathcal{P}$ arbitrario en polígonos monótonos
- Esta tarea es también realizada con un enfoque de barrido del plano
- A continuación describiremos los detalles de este algoritmo

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Imagínese caminando desde el vértice más a la izquierda de $\mathcal{P}$ hacia el vértice más a la derecha a lo largo de la cadena superior o inferior
- Un vértice donde la dirección en la que caminamos cambia de izquierda a derecha o de derecha a izquierda es llamado un **vértice de giro**
- Para subdividir $\mathcal{P}$ en piezas x-monótonas deben poderse procesar estos vértices especiales
- Esto puede hacerse mediante la adición de diagonales

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice de giro

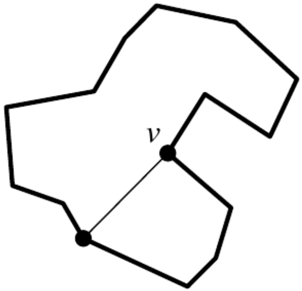


División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Si en un vértice de giro v, ambas aristas incidentes van hacia la derecha y el interior del polígono se encuentra localmente a la izquierda de v, entonces debemos elegir una diagonal que va hacia la izquierda desde v
- Esta diagonal divide al polígono en dos
- El vértice v aparecerá en ambas piezas
- Además, en ambas piezas v tiene una arista que va hacia la derecha (es decir, sobre las aristas originales de $\mathcal{P}$) y una arista que va hacia la izquierda (la diagonal)

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice de giro



División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Por lo tanto, v deja de ser un vértice de giro en cualquiera de los dos subpolígonos resultantes
- Si las dos aristas incidentes de un vértice de giro van hacia la izquierda y en el interior del polígono se encuentra localmente a la derecha de él, tenemos que elegir una diagonal que va hacia la derecha
- Esto parece indicar que hay diferentes tipos de vértices de giro. Vamos a ser más precisos en cuanto a este punto

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Para definir correctamente los tipos de vértices de giro debemos poner mucha atención a los vértices con coordenadas x iguales
- Para ello definiremos dos relaciones de orden, *derecha* e *izquierda* de la siguiente manera:
  - Un punto p está a la *derecha* de otro punto q si $p_x > q_x$ o $p_x = q_x$ y $p_y > q_y$
  - Un punto p está a la *izquierda* de otro punto q si $p_x < q_x$ o $p_x = q_x$ y $p_y < q_y$
- Esto resulta en que los eventos se procesen de arriba hacia abajo a lo largo de la línea de barrido
- Y tiene el mismo efecto que si giráramos (hipotéticamente) la línea de barrido infinitesimalmente a la derecha

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Existen cinco tipos de vértices en un polígono $\mathcal{P}$
- Cuatro de ellos son vértices de giro: vértice de inicio, vértice final, vértice de división y vértices de combinación
- Un vértice v es un **vértice de inicio** si sus dos vecinos se encuentran a la derecha de él y el ángulo interior en v es menor que 180° (π radianes)
- Si el ángulo interior es mayor que 180° entonces v es un **vértice de división**
- Si los dos vecinos se encuentran a la derecha de v, entonces el ángulo interior no puede ser exactamente 180°

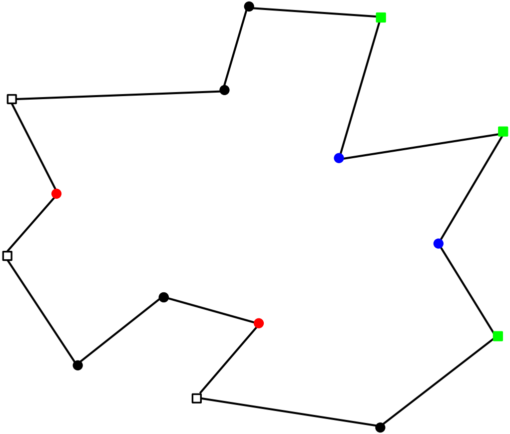
División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Un vértice es un **vértice final** si sus dos vecinos se encuentran a la izquierda de él y en el ángulo interior en v es menor que $180°$
- Si el ángulo interior es mayor que $180°$ entonces v es un **vértice de combinación**
- Los vértices que no son vértices de giro son **vértices regulares**
- Así pues, un vértice regular tiene uno de sus vecinos a la izquierda de él, y el otro a la derecha

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Tipos de vértices

- Inicio
- Final
- Regular
- División
- Combinación



División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Estos nombres han sido seleccionados porque el algoritmo utiliza un barrido del plano de izquierda a derecha, manteniendo la intersección de la línea de barrido con el polígono
- Cuando la línea de barrido llega a un vértice de división, un componente de la intersección se divide, cuando llega a un vértice de combinación, dos componentes se combinan, y así sucesivamente

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Tanto los vértices de división como los de combinación son fuentes de no monotonía local

Lema

Un polígono es x-monótono si no tiene vértices de división o vértices de combinación

- Pueden consultar la demostración de este lema en el libro de Berg et al.

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- El lema anterior implica que $\mathcal{P}$ se ha dividido en piezas x-monótonas una vez que logramos procesar su vértices de división y de combinación
- Esto lo hacemos al agregar una diagonal hacia la izquierda a partir de cada vértice de división
- Y una diagonal hacia la derecha desde cada vértice de combinación
- Desde luego, estas diagonales no se intersectan entre sí
- Una vez que hayamos hecho esto, se logrará dividir $\mathcal{P}$ en piezas x-monótonas

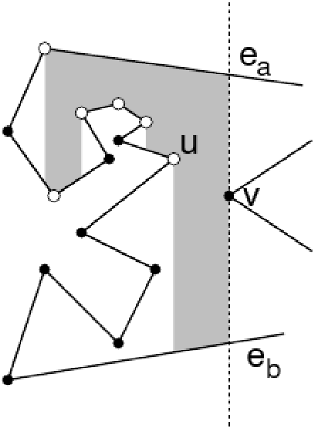
División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Vamos a discutir primero el caso de un vértice de división (ambas aristas se encuentran a la derecha del vértice)
- Cuando un vértice de división v es encontrado por la línea de barrido habrá una arista e_a del polígono encima y una arista e_b situada abajo de él
- Podemos considerar conectar el vértice de división al punto extremo izquierdo de una de estas dos aristas, pero puede ser que ningún punto extremo sea visible al vértice de división
- Tenemos que mantener un vértice que es visible para cualquier vértice de división que pueda surgir entre e_a y e_b

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Para ello, imagine una luz fluorescente que brilla desde cada punto en e_a (vértices blancos de la figura)
- Tenga en cuenta que el punto extremo izquierdo e_a es considerado en este conjunto también
- Decimos entonces que estos vértices son **verticalmente visibles** abajo de e_a

División de un polígono en subpolígonos monótonos



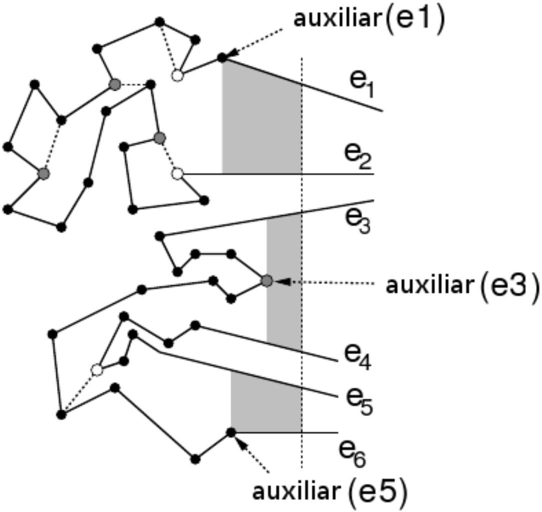
División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Entre todos los vértices que son iluminados por estos rayos de luz verticales, sea u el más a la derecha.
- Entonces u es visible para todo punto a lo largo de la línea de barrido entre e_a y e_b
- Esto sugiere el siguiente concepto, el cual se define para cada arista e_a que intersecta la línea de barrido, de manera que el polígono interior se encuentra localmente por debajo de e_a

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- *auxiliar*(e_a): Sea e_b la arista del polígono situada justo debajo de e_a en la línea de barrido
- El vértice auxiliar es el vértice más a la derecha verticalmente visible bajo e_a en la cadena poligonal entre e_a y e_b
- Unimos cada vértice de división a el *auxiliar*(e_a), donde e_a es la arista de $\mathcal{P}$ inmediatamente encima del vértice de división

División de un polígono en subpolígonos monótonos



División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Tengamos en cuenta que es posible que el auxiliar sea el punto extremo izquierdo de e_a
- También es importante resaltar que el $auxiliar(e_a)$ se define con respecto a la ubicación actual de la línea de barrido. A medida que la línea de barrido se mueve, su valor cambia
- Además, está definido sólo para aquellas aristas intersectadas por la línea de barrido

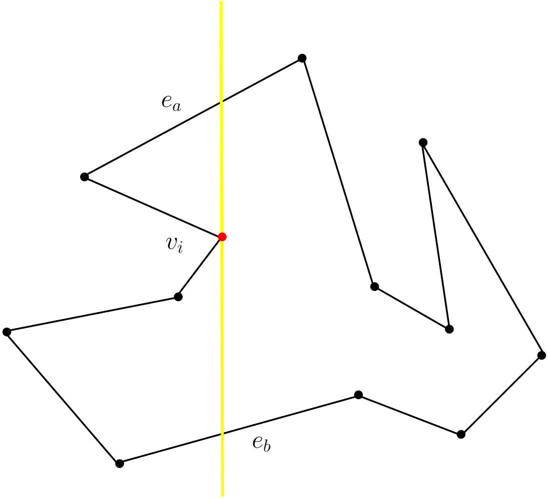
División de un polígono en subpolígonos monótonos

- En cuanto a los vértices de combinación parece más difícil deshacerse de ellos, porque necesitan una diagonal a un vértice situado más a la derecha que ellos
- Debido a que la parte de $\mathcal{P}$ a la derecha de la línea de barrido no se ha explorado todavía, no podemos agregar una diagonal de esta forma cuando encontramos un vértice de combinación
- Afortunadamente, este problema es más fácil de resolver de lo que parece a primera vista

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Supongamos que la línea de barrido llega a un vértice de combinación v_i
- Sean e_b y e_a las aristas inmediatamente abajo y arriba de la línea de barrido, respectivamente
- Observe que v_i se convierte en el nuevo $auxiliar(e_a)$ cuando lleguemos a él
- Nos gustaría conectar v_i al vértice más a la izquierda situado a la derecha de la línea de barrido entre e_b y e_a

División de un polígono en subpolígonos monótonos



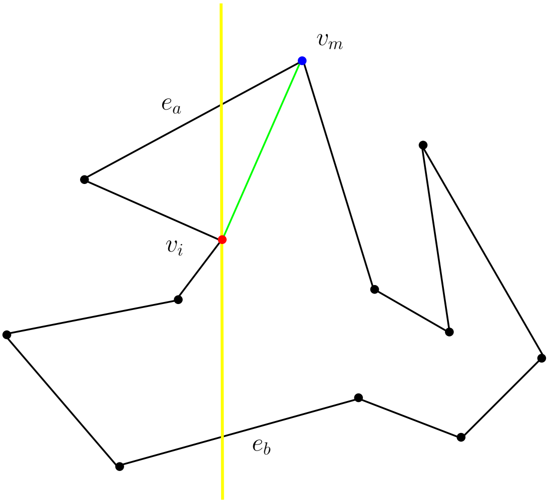
División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Esto es exactamente lo contrario a lo que hicimos con los vértices de división, los cuales se conectaron al vértice más a la derecha situado a la izquierda de la línea de barrido entre e_b y e_a
- Esto no es sorprendente puesto que los vértices de combinación son vértices de división al revés
- Por supuesto, no conocemos el vértice más a la izquierda situado a la derecha de la línea de barrido cuando llegamos a v_i

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Pero es fácil encontrarlo más tarde: cuando se llega a un vértice v_m que reemplaza v_i como el $auxiliar(e_a)$, pues este es el vértice que estamos buscando
- Por lo tanto, cada vez que sustituimos el auxiliar de alguna arista, se comprobará si el antiguo auxiliar es un vértice de combinación
- Si es así, se añade la diagonal entre el antiguo y el nuevo auxiliar
- Esta diagonal siempre se añade cuando el nuevo auxiliar es un vértice de división, con el fin de eliminarlo

División de un polígono en subpolígonos monótonos



División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Si el auxiliar anterior era un vértice de combinación, entonces nos deshacemos de un vértice de división y uno de combinación con la misma diagonal
- También puede ocurrir que el auxiliar de e_a no sea sustituido más a la derecha de v_i
- En este caso podemos conectar v_i al extremo derecho de e_a

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Para realizar las tareas que acabamos de describir tenemos que encontrar la arista arriba e_a de cada vértice
- Por lo tanto, debemos almacenar las aristas de $\mathcal{P}$ que intersectan la línea de barrido en las hojas de un árbol binario balanceado $\mathcal{T}$
- El orden de izquierda a derecha de las hojas de $\mathcal{T}$ corresponde al orden de arriba a abajo de las aristas
- Debido a que sólo estamos interesados en las aristas arriba de los vértices de división y combinación, sólo necesitamos almacenar en $\mathcal{T}$ las aristas que tienen el interior de $\mathcal{P}$ abajo de ellas

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Con cada arista en $\mathcal{T}$ almacenamos su auxiliar
- El árbol $\mathcal{T}$ y los auxiliares almacenados con las aristas forman el **estatus de la línea de barrido** del algoritmo
- El estatus cambia conforme la línea de barrido se mueve: las aristas comienzan o dejan de intersectar la línea de barrido, y el auxiliar de una arista puede ser sustituido
- El algoritmo particiona $\mathcal{P}$ en subpolígonos que deben ser procesados en una etapa posterior

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Para tener un fácil acceso a estos subpolígonos debemos almacenar la subdivisión inducida por $\mathcal{P}$ y las diagonales agregadas en una **lista de aristas doblemente conectada** $\mathcal{D}$
- Suponemos que $\mathcal{P}$ está inicialmente especificado como una lista de aristas doblemente conectada
- Las diagonales calculadas para los vértices de división y de combinación se agregan a $\mathcal{D}$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

- Para acceder a $\mathcal{D}$ usamos apuntadores entre las aristas en $\mathcal{T}$ y las aristas correspondientes en $\mathcal{D}$
- De esta forma agregar una diagonal puede hacerse en tiempo constante con una simple manipulación de apuntadores
- El algoritmo global es el siguiente

División de un polígono en subpolígonos monótonos

subdivisión Monótona

Entrada: Un polígono simple $\mathcal{P}$ almacenado en una lista de aristas doblemente conectada $\mathcal{D}$

Salida: Una subdivisión de $\mathcal{P}$ en subpolígonos monótonos almacenada en $\mathcal{D}$

1. Construir una cola de prioridad $\mathcal{Q}$ de los vértices de $\mathcal{P}$ usando sus coordenadas x como prioridad. Si dos puntos tienen la misma coordenada x entonces se usa el orden lexicográfico (x, y)
2. Inicializar un árbol binario balanceado $\mathcal{T}$ a vacío
3. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**
   a. Remueve el vértice v_i con la más alta prioridad de $\mathcal{Q}$
   b. Llama al procedimiento adecuado para procesar v_i dependiendo de su tipo

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Procesamiento de eventos

- Hay seis tipos de eventos basados en el análisis de la estructura local de las aristas al rededor de cada vértice
- Sea v_i el vértice actual encontrado por la línea de barrido

Vértice de inicio

1. Insertar sus aristas incidentes e_a y e_b en el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$
2. $auxiliar(e_a) \leftarrow v_i$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice final

1. Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
2. Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
3. Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice de división

1. Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
2. Insertar una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
3. Agregar las aristas e_a y e_b incidentes a v_i en $\mathcal{T}$
4. $auxiliar(e_b) \leftarrow v_i$
5. $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice de combinación

1. Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
2. Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
3. Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
4. $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice regular (interior del polígono arriba)

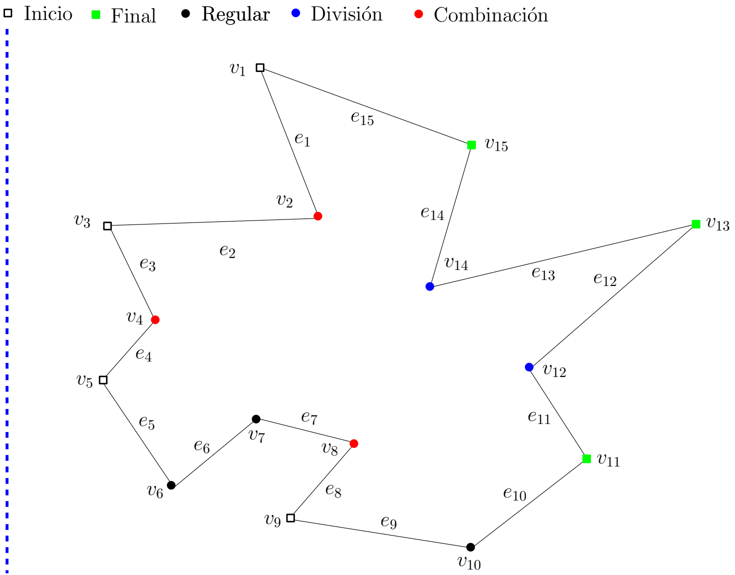
1. Reemplazar la arista izquierda incidente a v_i con la derecha en $\mathcal{T}$
2. Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
3. Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
4. $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

División de un polígono en subpolígonos monótonos

Vértice regular (interior del polígono abajo)

1. Reemplazar la arista izquierda e_a incidente a v_i con la derecha e_b en $\mathcal{T}$
2. Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
3. Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
4. $auxiliar(e_b) \leftarrow v_i$

1. Triangulación de polígonos
   - Problema de triangulación de polígonos
   - Polígonos monótonos
   - Triangulación de polígonos monótonos
   - División de un polígono en subpolígonos monótonos
   - Ejemplo

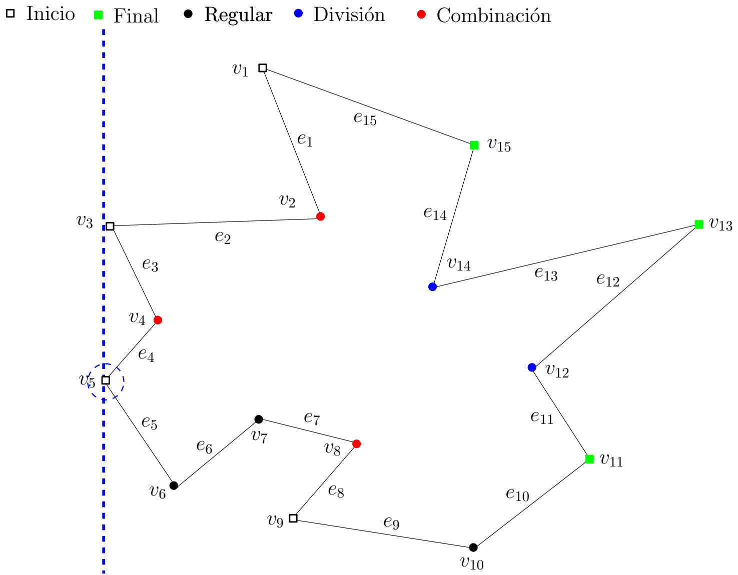


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\emptyset$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$

Inicialización

- Se almacena $\mathcal{P}$ en $\mathcal{D}$
- Se construye $\mathcal{Q}$ con los vértices de $\mathcal{P}$ ordenados por coordenadas x
- Se inicializa el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$ a vacío

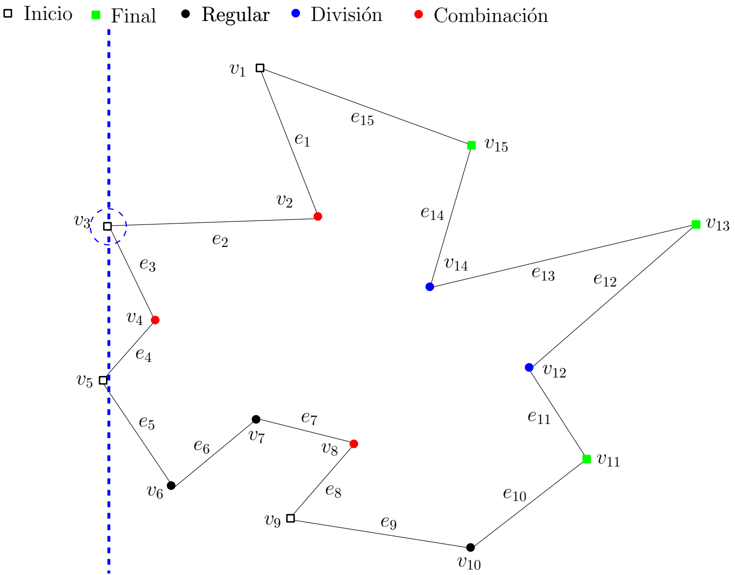


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_4$	v_5
e_5	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$

Vértice de inicio

- Insertar sus aristas incidentes e_a y e_b en el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_a) \leftarrow v_i$



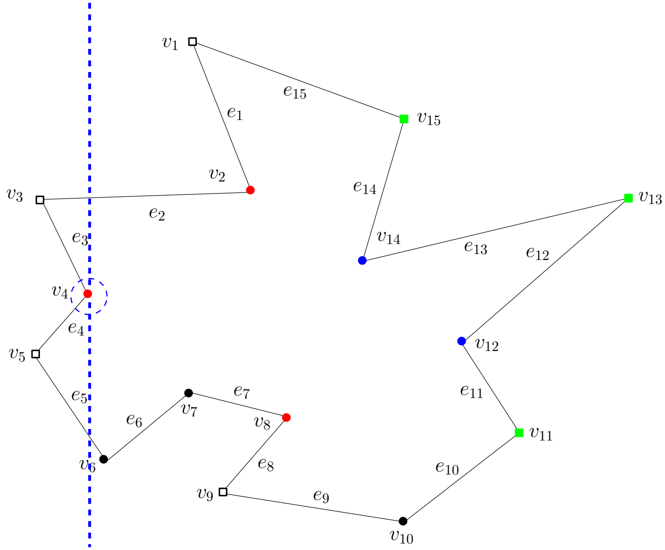
$\mathcal{T}$		
	e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow$	e_2	v_3
	e_3	
	e_4	v_5
	e_5	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$

Vértice de inicio

- Insertar sus aristas incidentes e_a y e_b en el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_a) \leftarrow v_i$

□ Inicio ■ Final ● Regular ● División ● Combinación

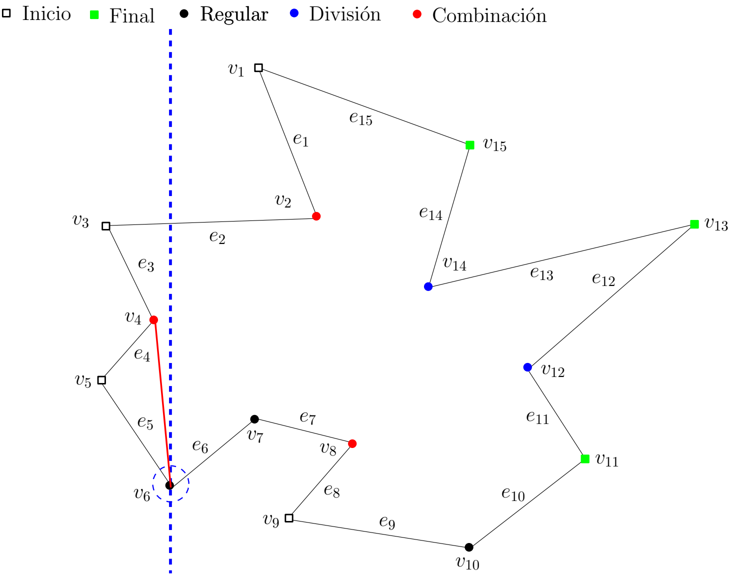


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_2$	$\cancel{v_3}$ v_4
$\cancel{e_3}$	
$\cancel{e_4}$	$\cancel{v_5}$
e_5	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$

Vértice de combinación

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

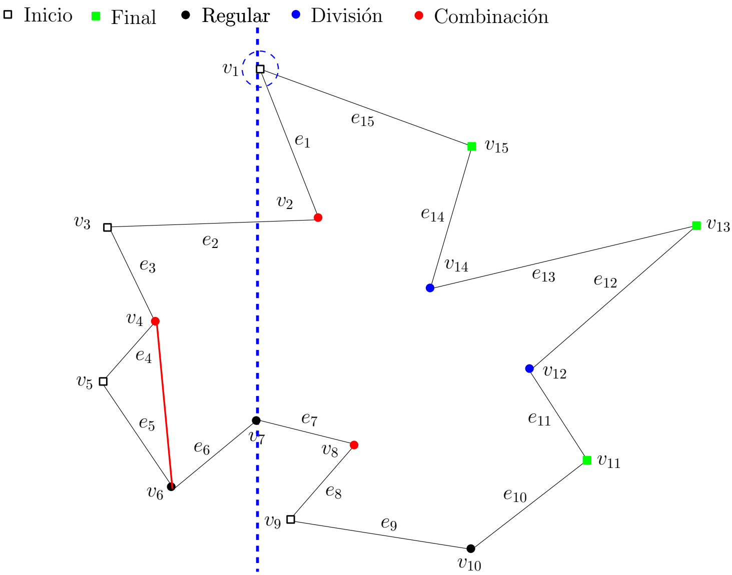


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_2$	$\cancel{v_4}\ v_6$
$\cancel{e_5}\ e_6$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$

Vértice regular (interior del polígono arriba)

- Reemplazar la arista izquierda incidente a v_i con la derecha en $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

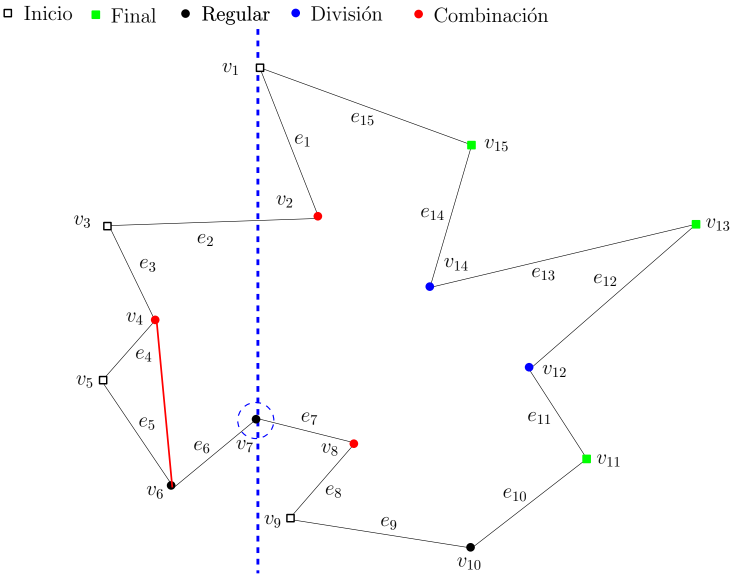


	$\mathcal{T}$	
	e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow$	e_{15}	v_1
	e_1	
	e_2	v_6
	e_6	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$

Vértice de inicio

- Insertar sus aristas incidentes e_a y e_b en el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_a) \leftarrow v_i$

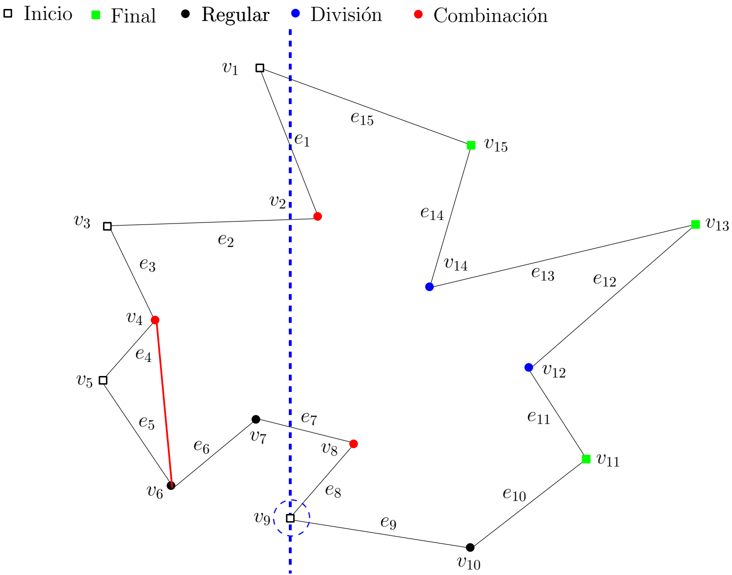


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
e_{15}	v_1
e_1	
$\rightarrow e_2$	$\cancel{v_6}\ v_7$
$\cancel{e_6}\ e_7$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$

Vértice regular (interior del polígono arriba)

- Reemplazar la arista izquierda incidente a v_i con la derecha en $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

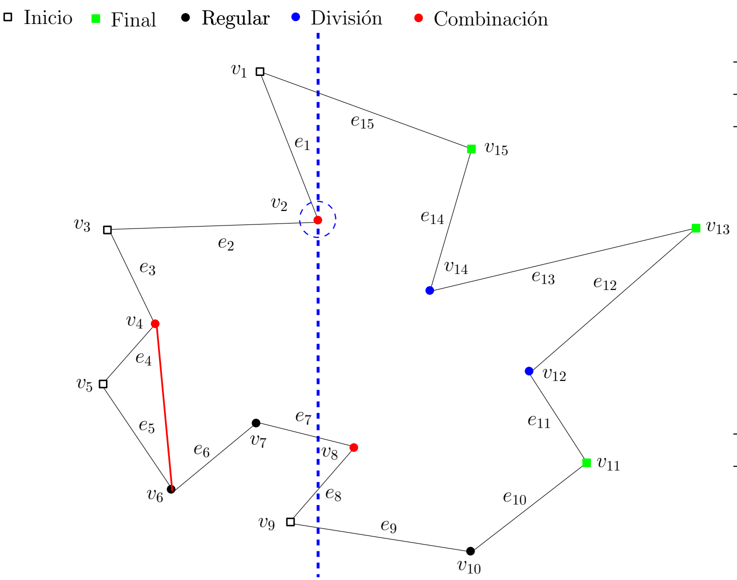


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
e_{15}	v_1
e_1	
e_2	v_7
e_7	
$\rightarrow e_8$	v_9
e_9	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$

Vértice de inicio

- Insertar sus aristas incidentes e_a y e_b en el estatus de la línea de barrido $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_a) \leftarrow v_i$

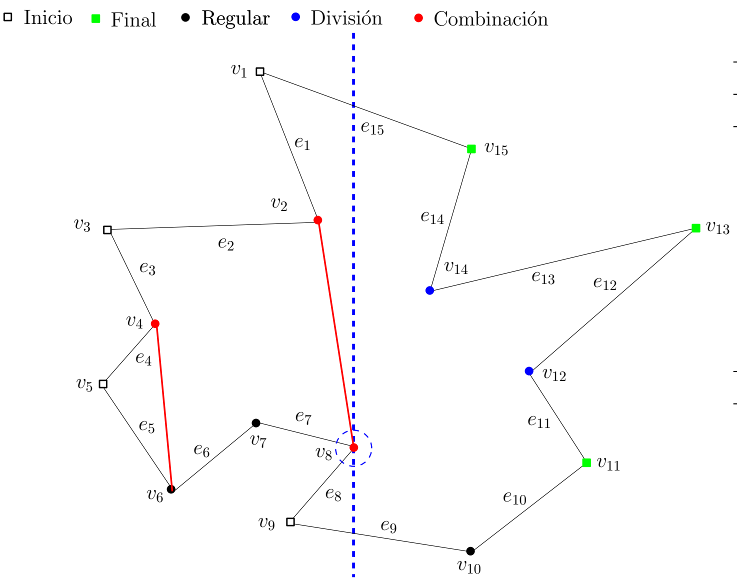


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_{15}$	$\cancel{v_1}$ v_2
$\cancel{e_1}$	
$\cancel{e_2}$	$\cancel{v_7}$
e_7	
e_8	v_9
e_9	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$

Vértice de combinación

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

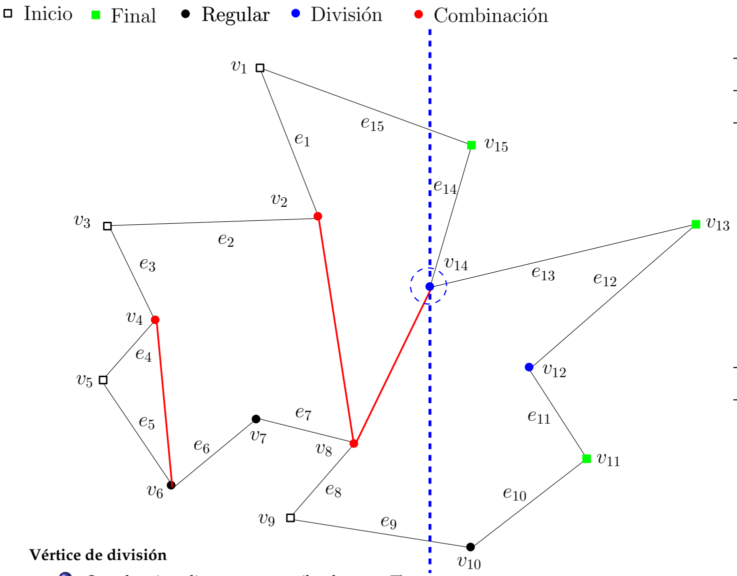


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_{15}$	$\cancel{v_2}\ v_8$
$\cancel{e_7}$	
$\cancel{e_8}$	$\cancel{v_9}$
e_9	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6v_4}$
$\overline{v_8v_2}$

Vértice de combinación

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

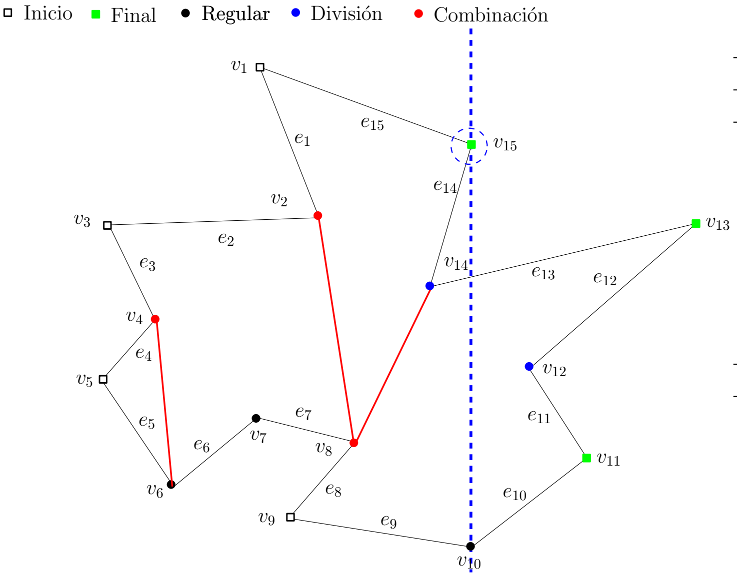


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_{15}$	$\cancel{v_8}$ v_{14}
e_{14}	
$\rightarrow e_{13}$	v_{14}
e_9	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6v_4}$
$\overline{v_8v_2}$
$\overline{v_{14}v_8}$

Vértice de división

- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Insertar una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- Agregar las aristas e_a y e_b incidentes a v_i en $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_b) \leftarrow v_i$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

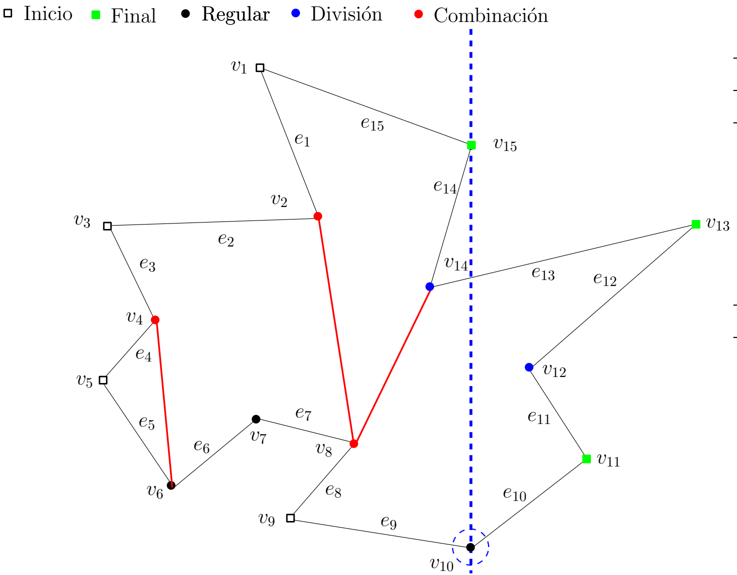


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\cancel{e_{15}}$	$\cancel{v_{14}}$
$\cancel{e_{14}}$	
e_{13}	v_{14}
e_9	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$

Vértice final

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si *auxiliar*(e) es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el *auxiliar*(e) en $\mathcal{D}$

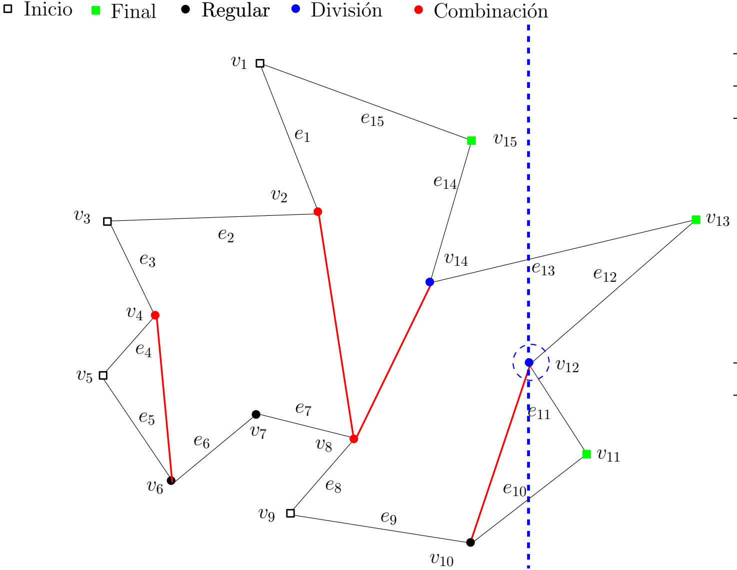


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_{13}$	$\cancel{v_{14}}\ v_{10}$
$\cancel{e_9}\ e_{10}$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$

Vértice regular (interior del polígono arriba)

- Reemplazar la arista izquierda incidente a v_i con la derecha en $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

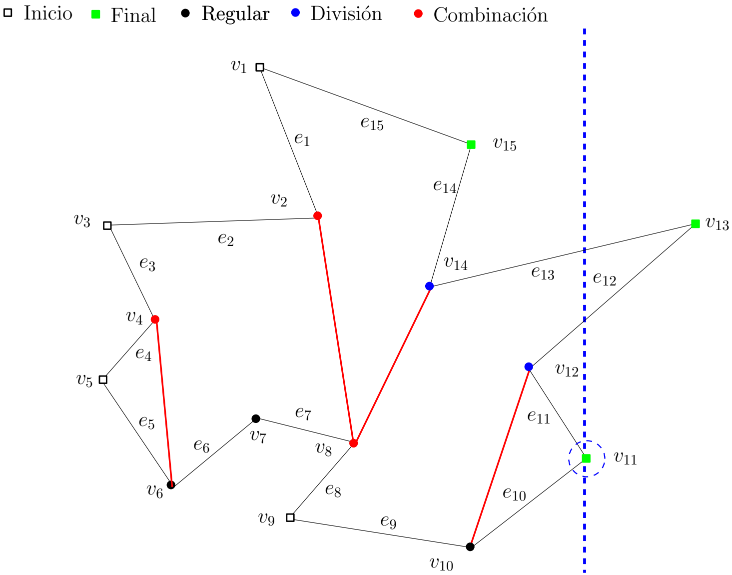


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\rightarrow e_{13}$	$\cancel{v_{10}}$ v_{12}
e_{12}	
$\rightarrow e_{11}$	v_{12}
e_{10}	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$
$\overline{v_{12} v_{10}}$

Vértice de división

- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Insertar una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$
- Agregar las aristas e_a y e_b incidentes a v_i en $\mathcal{T}$
- $auxiliar(e_b) \leftarrow v_i$
- $auxiliar(e) \leftarrow v_i$

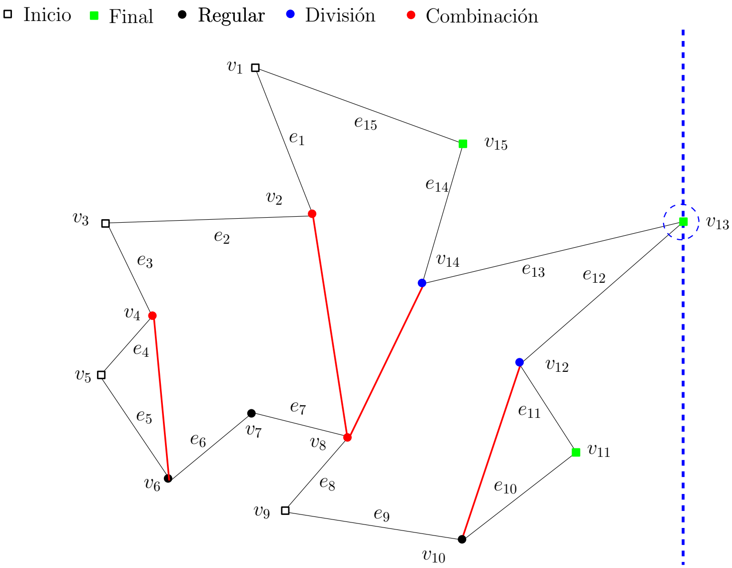


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
e_{13}	v_{12}
e_{12}	
$\cancel{e_{11}}$	$\cancel{v_{12}}$
$\cancel{e_{10}}$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$
$\overline{v_{12} v_{10}}$

Vértice final

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si $auxiliar(e)$ es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el $auxiliar(e)$ en $\mathcal{D}$

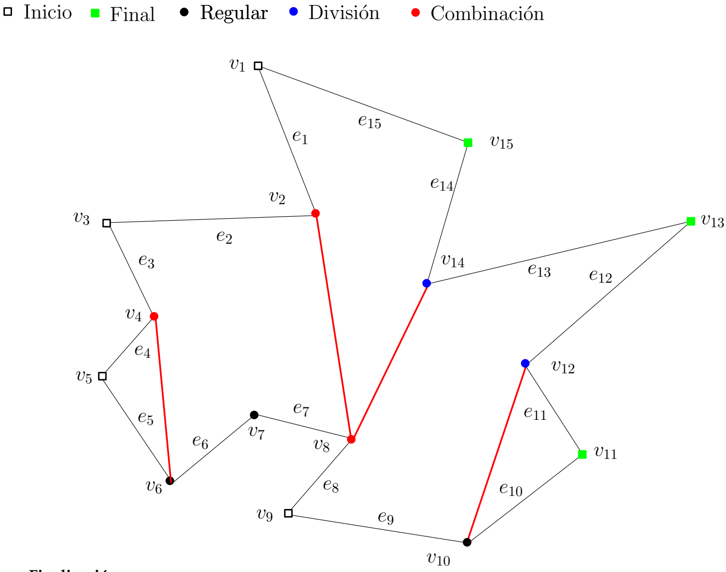


$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\cancel{e_{13}}$	$\cancel{v_{12}}$
$\cancel{e_{12}}$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$
$\overline{v_{12} v_{10}}$

Vértice final

- Borrar las aristas incidentes a v_i de $\mathcal{T}$
- Sea e la arista directamente arriba de v_i en $\mathcal{T}$
- Si *auxiliar*(e) es un vértice de combinación entonces inserta una diagonal entre v_i y el *auxiliar*(e) en $\mathcal{D}$



$\mathcal{T}$	
e_i	$aux(e_i)$
$\emptyset$	

$\mathcal{D}$
Polígono $\mathcal{P}$
$\overline{v_6 v_4}$
$\overline{v_8 v_2}$
$\overline{v_{14} v_8}$
$\overline{v_{12} v_{10}}$

Finalización

- Todos los vértices en $\mathcal{Q}$ han sido procesados
- Se devuelve la subdivisión de $\mathcal{P}$ en subpolígonos monótonos almacenada en $\mathcal{D}$ como resultado