Intersección de semiplanos

Dr. Eduardo A. Rodríguez Tello

Cinvestav-Tamaulipas

1 de marzo del 2013

- El material de esta clase está basado en el capítulo 4 y fragmentos de las secciones 8.2 y 11.4 del libro:
  Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld and Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 3rd edition (April 16, 2008), ISBN-10: 3540779736.

Introducción

- Hoy iniciamos el estudio de otro tema fundamental en la geometría computacional, y sobre la marcha mostraremos una sorprendente relación entre este tema y el tema de las cubiertas convexas
- Cualquier línea en el plano lo divide en dos regiones, llamadas **semiplanos**, situadas a ambos lados de la línea
- Un semiplano es **cerrado** si contiene la línea que lo acota y es **abierto** si no la contiene
- Durante esta clase estaremos interesados en semiplanos cerrados

Introducción

- ¿Cómo se representan las líneas y semiplanos?
- Normalmente, es suficiente representar las líneas en el plano utilizando la siguiente ecuación: $y = mx - b$,
- Donde a denota la pendiente y b la negación de la intersección con el eje y. (más adelante veremos porque es conveniente esta representación)

Introducción

- Desafortunadamente, no es totalmente general, ya que no permite representar líneas verticales
- Una representación más general de la línea comúnmente requiere tres parámetros, como en la siguiente ecuación:

$$ax + by = c \quad (1)$$

- En este caso, es sencillo ver que la línea tiene pendiente $-b/a$ y por lo tanto es perpendicular al vector (a, b)

Introducción

- La ecuación permanece sin cambio si la multiplicamos por un escalar, y de esa forma si $c \neq 0$ (la línea no pasa por el origen) se podría expresar de forma más resumida como

$$a'x + b'y = 1 \tag{2}$$

- Donde $a' = a/c$ y $b' = b/c$

Introducción

- Para representar un semiplano cerrado, convertimos cualquiera de las dos representaciones en una desigualdad:

$$y \leq ax - b \qquad \text{o} \qquad ax + by \leq c \tag{3}$$

- El primer caso representa el semiplano que cae bajo la línea
- El segundo, es más general ya que podemos representar semiplanos a ambos lados de la línea, simplemente multiplicando todos los coeficientes por -1

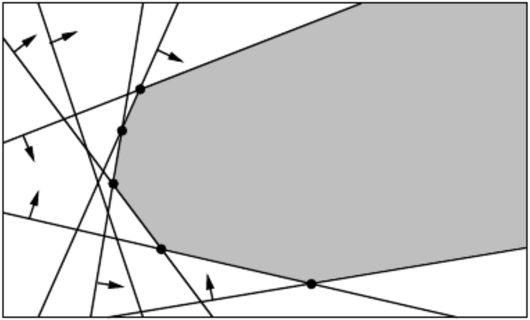
Cinvestav

Problema de intersección de semiplanos

- Dado un conjunto de n semiplanos cerrados, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ calcular su intersección
- Un semiplano (cerrado o abierto) es un conjunto convexo, y por lo tanto la intersección de cualquier número de semiplanos también es un conjunto convexo
- A diferencia del problema de la cubierta convexa, la intersección de n semiplanos puede ser en general vacía o incluso no acotada
- Una representación razonable de salida podría ser la lista de las líneas que limitan la intersección en orden contrario a las manecillas del reloj, tal vez junto con algún mensaje indicando si la figura final está acotada o no

Problema de intersección de semiplanos

Intersección de semiplanos



Problema de intersección de semiplanos

- ¿Cuántos lados pueden acotar la intersección de n semiplanos en el peor caso?
- Observe que por convexidad, cada uno de los semiplanos puede aparecer sólo una vez como un lado, y por lo tanto el máximo número de lados es n
- ¿Qué tan rápido se puede calcular la intersección de semiplanos?
- Al igual que en el problema de la cubierta convexa se puede demostrar mediante una reducción adecuada del ordenamiento que el problema tiene una cota inferior de $\Omega(n \log n)$

Problema de intersección de semiplanos

- ¿Quién se interesa en este problema?
- Nuestro libro analiza una aplicación en el área de fundición de metales
- La intersección de semiplanos y de semiespacios en dimensiones superiores también son utilizadas en la generación de aproximaciones de formas convexas
- En gráficas computacionales, por ejemplo, una caja de selección (*bounding box*) se usa a menudo en la aproximación de formas complejas con múltiples caras poliédricas

Problema de intersección de semiplanos

- Algunos predicados de prueba (por ejemplo, de visibilidad o de intersección) pueden ser implementados más fácil y rápidamente cuando se utiliza una caja de selección en vez del objeto original
- Podemos generalizar esto para producir objetos de selección (*bounding objects*) más precisos considerando semiespacios que no están alineados con los ejes, sino que están alineados a lo largo de algún número fijo de direcciones predefinidas

Problema de intersección de semiplanos

- A continuación presentaremos un algoritmos para resolver el problema de la intersección de semiplanos
- Este algoritmo está basado en una interesante combinación de dos técnicas que hemos estudiado anteriormente:
    - Divide y vencerás
    - Barrido del plano
- Comenzaremos por esquematizar el algoritmo divide y vencerás para calcular la intersección de semiplanos

Problema de intersección de semiplanos

Divide y vencerás

1. Si $n = 1$ entonces regresa este semiplano como respuesta
2. Divide los n semiplanos de H en subconjuntos H_1 y H_2 de tamaños $\lfloor n/2 \rfloor$ y $\lceil n/2 \rceil$, respectivamente
3. Calcular la intersección de H_1 y H_2, cada una llamando este procedimiento recursivamente. Sean K_1 y K_2 los resultados
4. Intersecta los polígonos convexos K_1 y K_2 (los cuales puede ser no acotados) en un solo polígono convexo K, y regresa K como respuesta

Cinvestav

Problema de intersección de semiplanos

- El tiempo de ejecución del algoritmo anterior es descrito más fácilmente usando una relación de recurrencia
- Si ignoramos los factores constantes y asumimos para simplificar que n es una potencia de 2, entonces el tiempo de ejecución puede ser descrito como:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + M(n) & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Donde $M(n)$ es el tiempo requerido para combinar los dos resultados, es decir, para calcular la intersección de dos polígonos convexos cuya complejidad total es n

Problema de intersección de semiplanos

- Mostraremos más adelante que $M(n) = O(n)$, y por lo tanto de acuerdo a resultados estándar de recurrencias el tiempo promedio de ejecución $T(n)$ es $O(n \log n)$

1. Intersección de semiplanos
   - Introducción
   - Problema de intersección de semiplanos
   - Intersección de dos polígonos convexos
   - Envoltura inferior y dualidad
   - Dualidad
   - Propiedades de la dualidad punto-línea
   - Cubiertas convexas y envolturas inferiores

Cinvestav

Intersección de dos polígonos convexos

- La única parte no trivial del proceso es la aplicación de un algoritmo que intersecte dos polígonos convexos, K_1 y K_2, en un único polígono convexo
- Tengamos en cuenta que estos son polígono convexos algo especiales porque puede ser vacíos o no acotados
- Sabemos que es posible calcular la intersección de segmentos de línea en tiempo $O((n+I)\log n)$, donde I es el número de pares de intersección

Intersección de dos polígonos convexos

- Dos polígonos convexos no se puede cortar en más de $I = O(n)$ pares (esto se deduce de la observación de que cada arista de un polígono puede intersectar a lo más dos aristas del otro polígono por la convexidad)
- Esta propiedad produciría un algoritmo $O(n \log n)$ para calcular la intersección
- Sería demasiado lento, pues da como resultado un tiempo total de $O(n \log^2 n)$ para $T(n)$

Intersección de dos polígonos convexos

- Hay dos enfoques comunes para la intersección de polígonos convexos
- Ambos se basan en la combinación de las dos cubiertas
- Uno trabaja con un enfoque de barrido del plano
- El otro implica un barrido simultáneo en sentido contrario a las manecillas del reloj de las dos cubiertas
- Este último algoritmo se describe a detalle en el libro de O'Rourke
- Discutiremos el algoritmo de barrido del plano

Intersección de dos polígonos convexos

- Realizamos un barrido del plano de izquierda a derecha para calcular la intersección
- Empezamos por separar las cubiertas de los polígonos convexos en sus cadenas superiores e inferiores
- Por convexidad, la línea de barrido intersecta cada polígono convexo K_i en máximo dos puntos
- Así que hay un máximo de cuatro puntos en la línea de barrido en cualquier momento

Cinvestav

Intersección de dos polígonos convexos

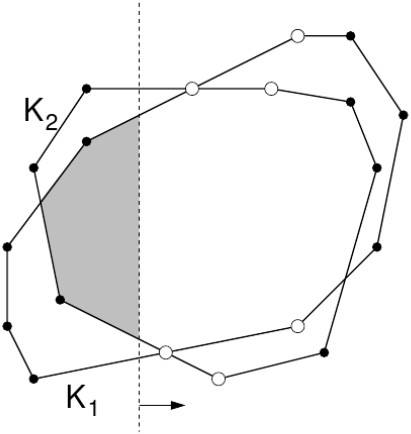
- Por lo tanto, no se necesita un diccionario ordenado para el almacenamiento del estado de la línea de barrido
- Una lista simple de 4 elementos es suficiente
- Además, nuestra cola de eventos sólo necesita ser de tamaño constante

Intersección de dos polígonos convexos

- En cualquier punto hay como máximo 8 posibles candidatos para el próximo evento:
  - Los puntos extremos derechos de las 4 aristas intersectadas por la línea de barrido
  - Los puntos de intersección de estas aristas de K_1 con las aristas correspondientes de K_2 (como máximo 4)
- Dado que sólo hay un número constante de posibles eventos, y cada uno puede ser manejado en tiempo $O(1)$, el tiempo total de ejecución es $O(n)$.

Intersección de dos polígonos convexos

Intersección de dos polígonos convexos



Envoltura inferior y dualidad

- A continuación vamos a considerar una ligera variante de este problema, para demostrar algunas conexiones con el cálculo de cubiertas convexas
- Estas conexiones son muy importantes para la comprensión de la geometría computacional, y veremos más acerca de ellas más adelante
- Estas conexiones tienen que ver con un concepto llamado **dualidad punto-línea**

Envoltura inferior y dualidad

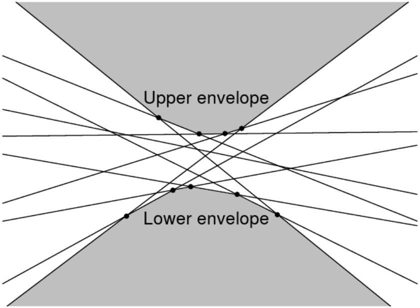
- En pocas palabras se observa una notable similitud entre cómo interactúan los puntos unos con otros y cómo interactúan las líneas unas con otras
- A veces es posible tener un problema que implica el manejo de puntos y mapearse a un problema equivalente relacionado con líneas, y viceversa
- En el proceso, nuevos detalles del problema puede llegar a descubrirse más fácilmente

Envoltura inferior y dualidad

- El problema a considerar es conocido como el **problema de la envoltura inferior**, y es un caso especial del problema de la intersección de semiplanos
- Dado un conjunto de n líneas $L = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, donde ℓ_i es de la forma $y = a_i x - b_i$
- Piense en que estas líneas definen n semiplanos, $y \leq a_i x - b_i$, situados *bajo* cada una de las líneas
- La **envoltura inferior** de L es la frontera de la intersección de estos semiplanos
- También hay una **envoltura superior**, formada al considerar la intersección de los semiplanos situados por encima de las líneas

Envoltura inferior y dualidad

Envolturas superior e inferior



Envoltura inferior y dualidad

- El **problema de la envoltura inferior** es una versión restringida del problema de la intersección de semiplanos, pero muy interesante
- Observe que cualquier problema de intersección de semiplanos que no implique ninguna línea vertical pueden ser replanteado como la intersección de dos envolturas
- Una envoltura inferior definida por los semiplanos inferiores y una envoltura superior definida por los semiplanos superiores

Envoltura inferior y dualidad

- Veremos que solucionar el problema de la envoltura inferior es muy similar a resolver el problema de la cubierta convexa superior
- De hecho, son tan similares que exactamente el mismo algoritmo va a resolver ambos problemas, sin cambiar ni un solo carácter del código
- Todo lo que cambia es la forma en que se interpretan las dos entradas y las dos salidas

Dualidad

- A principios de este curso estudiamos el concepto de polaridad
- Esta transformación mapea puntos a hiperplanos y viceversa, y preserva las relaciones de incidencia
- Existen diferentes maneras de definir esta transformación
- Consideramos otra transformación aquí, la cual tiene muchas de las propiedades generales de la polaridad
- Al igual que ocurre con la polaridad, esta transformación se puede aplicar en dimensiones arbitrarias, pero aquí vamos a considerar que se aplica en el plano

Dualidad

- Empecemos por considerar líneas en el plano
- Cada línea se puede representar de varias maneras, pero por ahora, vamos a asumir la representación $y = ax - b$, para ciertos valores escalares a y b
- ¿Por qué usar $-b$ en lugar de $+b$?
- La distinción no es importante, pero permitirá simplificar la notación usada más adelante
- Con esta notación no es posible representar líneas verticales, por ahora sólo vamos a ignorar este tipo de líneas, más adelante veremos como manejar este caso especial

Dualidad

- Por lo tanto, con el fin de describir una línea en el plano, sólo se tiene que contar con sus dos coordenadas (a, b)
- En cierto sentido, las líneas en el plano se puede considerar como puntos en un nuevo plano en el que los ejes de coordenadas están etiquetados (a, b), en lugar de (x, y)
- Por lo tanto, la línea $y = 7x - 4$ corresponde al punto $(7, 4)$ en este nuevo plano
- Cada punto en este nuevo plano de "líneas" corresponde a una línea no vertical en el plano original

Dualidad

- Vamos a llamar **plano primal** al plano original (x, y), y **plano dual** al nuevo plano (a, b)
- ¿Cuál es la ecuación de una línea en el plano dual?
- Dado que el sistema de coordenadas utiliza a y b, podemos escribir una línea en una forma simétrica, por ejemplo, $b = 3a - 5$
- Donde los valores 3 y 5 podrían ser sustituidos por cualquier valor escalar

Dualidad

- Considere un punto particular $p = (p_x, p_y)$ en el plano primal, y el conjunto de todas las líneas no verticales que pasan por este punto
- Cualquier línea debe satisfacer la ecuación $p_y = ap_x - b$
- Las imágenes de todas estas líneas en el plano dual es un conjunto de puntos:

$$\begin{aligned} L &= \{(a, b) \mid p_y = ap_x - b\} \\ &= \{(a, b) \mid b = ap_x - p_y\} \end{aligned} \tag{5}$$

Dualidad

- Observe que este conjunto no es otra cosa más que el conjunto de puntos que se encuentran sobre una línea en plano dual (a, b)
- Esto explica porque es conveniente negar b en la ecuación de la línea
- De esta manera, no sólo las líneas en el plano primal mapean a puntos en el plano dual, sino que también puntos en el plano primal corresponden a líneas en el plano dual
- Para hacer todo esto más formal, podemos definir una función para este mapeo y la denotaremos mediante un asterisco $(*)$ como superíndice

Dualidad

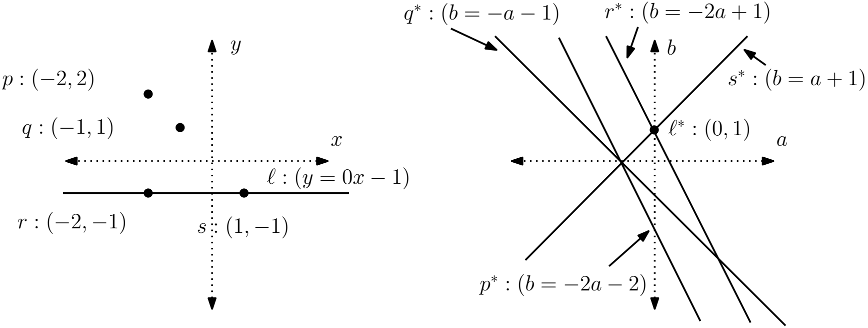
- Por lo tanto, dado un punto $p = (p_x, p_y)$ y la línea $\ell : (y = \ell_a x - \ell_b)$ en el plano primal
- Definimos ℓ^* y p^* como un punto y una línea respectivamente en el plano dual definido por:

$$\begin{aligned} \ell^* &= (\ell_a, \ell_b) \\ p^* &= (b = p_x a - p_y) \end{aligned} \tag{6}$$

- Podemos también definir el mismo tipo de mapeo de dual a primal

Dualidad

- Primal: $p = (p_x, p_y)$; $\ell : (y = \ell_a x - \ell_b)$
- Dual: $p^* = (b = p_x a - p_y)$; $\ell^* = (\ell_a, \ell_b)$



Plano primal **Plano dual**

Propiedades de la dualidad punto-línea

- La dualidad tiene una serie de propiedades interesantes, cada una de las cuales es fácil de comprobar mediante la sustitución de la definición y un poco de álgebra
- **Auto inversa:** $(p^*)^* = p$
- **Inversión del orden:** El punto p se encuentra encima/en/debajo de la línea ℓ en el plano primal si y sólo si la línea p^* pasa debajo/en/encima del punto ℓ^* en el plano dual, respectivamente

Propiedades de la dualidad punto-línea

- **Preservación de la intersección:** Las líneas ℓ_1 y ℓ_2 se intersectan en el punto p si y sólo si la línea p^* pasa a través de los puntos ℓ_1^* y ℓ_2^* en el plano dual
- **Colinealidad/Coincidencia:** Tres puntos son colineales en el plano primal si y sólo si sus líneas duales se intersectan en un punto común

Cinvestav

Propiedades de la dualidad punto-línea

- Por ejemplo, para verificar la propiedad de *inversión del orden*, observe que p se encuentra por encima de ℓ si y sólo si

$$p_y > \ell_a p_x - \ell_b \tag{7}$$

- Reescribiendo tenemos

$$\ell_b > \ell_a p_x - p_y \tag{8}$$

- Lo cual (en el plano dual) es equivalente a decir que ℓ^* se encuentra por encima de p^*, es decir, que p^* pasa por debajo de ℓ^*
- Para concluir, tenemos que hacer la conexión entre la cubierta convexa superior de un conjunto de puntos y la envoltura inferior de un conjunto de líneas

Cinvestav

Propiedades de la dualidad punto-línea

- La transformación de polaridad presentada anteriormente en el curso y la transformación de dualidad que acabamos de presentar tienen algunas características similares
- Por ejemplo, en la transformación de polaridad cada punto es mapeado a una línea que no pasa por el origen
- En cambio, con la transformación de dualidad es posible generar líneas que pasan por el origen, pero sólo se generan líneas no verticales
- En general, la decisión de seleccionar la transformación de dualidad se basa en el problema que se esté resolviendo

Cubiertas convexas y envolturas inferiores

- El siguiente lema demuestra que, bajo la transformación de dualidad, el problema de la cubierta convexa se transforma en el problema de la envoltura inferior

Lema

Sea P un conjunto de puntos en el plano. El recorrido en orden inverso a las manecillas del reloj de los puntos a lo largo de la cubierta convexa superior (inferior) de P, es igual al recorrido en orden de izquierda a derecha de la secuencia de líneas de la envoltura inferior (superior) del dual P^*.

Cubiertas convexas y envolturas inferiores

Demostración

- Vamos a probar el resultado sólo para la cubierta convexa superior y la envoltura inferior, ya que el otro caso es simétrico
- Para simplificar, vamos a suponer que ninguna tercia de puntos son colineales
- Observe que una condición necesaria y suficiente para que un par de puntos $p_i p_j$ formen una arista en la cubierta convexa es que la línea ℓ_{ij} que pasa a través de estos dos puntos tiene cualquier otro punto en P estrictamente por debajo de él.

Cubiertas convexas y envolturas inferiores

Demostración ...

- Considere las líneas duales p_i^* y p_j^*
- Una condición necesaria y suficiente para que estas líneas sean adyacentes en la envoltura inferior es que el punto dual ℓ_{ij}^* en el cual se intersectan, se encuentre debajo de todas las demás líneas duales en P^*
- La condición de *inversión del orden* de la dualidad nos garantiza que la condición primal se produce si y sólo si la condición dual ocurre
- Por lo tanto, la secuencia de las aristas en la cubierta convexa superior es idéntica a la secuencia de vértices a lo largo de la envoltura inferior

Cubiertas convexas y envolturas inferiores

Demostración ...

- A medida que avanzamos en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo de la cubierta convexa superior observamos que las pendientes de las aristas se incrementan monotonamente
- Dado que la pendiente de una línea en el plano primal es la la coordenada a del punto dual, se deduce que, a medida que avanzamos en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo de la cubierta convexa superior, se visita la envoltura inferior de izquierda a derecha

Cinvestav